Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
SoSe 2026

Algebra – Blatt 10

Abgabe bis 29.6.2026, 8:30 Uhr im Ilias

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Anmerkung: Ist K ein Körper, V ein K-Vektorraum und sind $v_1, \dots, v_n \in V$, so verwende ich die Notation $\langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$ für den von $v_1, \dots, v_n$ erzeugten Untervektorraum von V. Andere übliche Notationen dafür sind $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$, $L(v_1, \dots, v_n)$.

Aufgabe 1 (2+1 Punkte):

(a) Vielleicht wissen Sie aus der Schule, dass $\sqrt{p}$ irrational ist, für Primzahlen p. Geben Sie einen (neuen) Beweis davon an, mit Hilfe des Eisensteinschen Irreduzibilitätskriteriums.
Hinweis: Wenn $\sqrt{p}$ rational wäre, hätte das Polynom $x^2 - p$ eine Nullstelle in $\mathbb{Q}$.

(b) Wir fassen nun $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auf. Zeigen Sie, dass für Primzahlen p gilt: 1 und $\sqrt{p}$ sind $\mathbb{Q}$-linear unabhängig (d. h. hier werden 1 und $\sqrt{p}$ als Vektoren im $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{R}$ aufgefasst).

Aufgabe 2 (1+1+1+1 Punkte):

Seien $K \subseteq L \subseteq M$ Körper. (Wir können also insbesondere M sowohl als K- als auch als L-Vektorraum auffassen.) Seien außerdem $a_1, \dots, a_n \in M$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Sind $a_1, \dots, a_n$ K-linear unabhängig, so sind sie auch L-linear unabhängig.

(b) Sind $a_1, \dots, a_n$ L-linear unabhängig, so sind sie auch K-linear unabhängig.

(c) $\langle a_1, \dots, a_n \rangle_K \subseteq \langle a_1, \dots, a_n \rangle_L$

(d) $\langle a_1, \dots, a_n \rangle_L \subseteq \langle a_1, \dots, a_n \rangle_K$

Aufgabe 3 (1+1+1+1+1+2+2+1 Punkte):

In dieser Aufgabe sollen keine Resultate aus Abschnitt 3.2 verwendet werden (auch wenn Sie sie erst nach Mittwoch lösen).

(a) Zeigen Sie, dass das Polynom $f = x^3 + 4x - 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ ist.

(b) Folgern Sie (mit einem Satz aus Abschnitt 2.5), dass $L := \mathbb{Q}[x]/(f)$ ein Körper ist.

(c) Bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$ unter Verwendung von Beispiel 2.2.14.

(d) Laut Beispiel 2.2.14 ist L ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Basis $\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2$. Dann sollte sich also insbesondere $\bar{x}^3$ als Linearkombination dieser Basisvektoren ausdrücken lassen. Wie?
Hinweis: Was können Sie über $\bar{f} = \bar{x}^3 + 4\bar{x} - 1 \in L$ sagen?

(e) Sei $g = a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 \in L$, für $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$. Drücken Sie $\bar{x} \cdot \bar{g}$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombination der Basisvektoren $\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2$ aus.

(f) Sei $\alpha\colon L \to L, \bar{g} \mapsto \bar{x} \cdot \bar{g}$ die Multiplikation mit $\bar{x}$. Zeigen Sie, dass α eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist, indem Sie die entprechende Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ bezüglich des obigen Basis $\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2$ angeben.
(Falls nötig, sollten Sie sich als erstes in Erinnerung rufen, was „Matrix bezüglich einer Basis“ bedeutet.)

(g) Seien nun $h = b_0 + b_1\bar{x} + b_2\bar{x}^2 \in L$ gegeben, sei $\beta\colon L \to L$ die Multiplikation mit h und $B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ die entsprechende Matrix. Wie kann man B aus A erhalten?
Hinweis: Wenn Sie keine Idee haben, können Sie mit Spezialfällen anfangen, z. B. $h = \bar{x}^2$ und dann $h = b_2\bar{x}^2$.

(h) Wenn L ein Körper ist, sollte es ein multiplikatives Inverses von $\bar{x}$ geben, also ein $\bar{g} \in L$ mit $\bar{x} \cdot \bar{g} = 1$. Wie kann man $\bar{g}$ mit Hilfe der Matrix A bestimmen? (Sie brauchen die eigentliche Rechnung nicht durchzuführen.)

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass das Polynom $f(x) = 1 + x^p + x^{2p} + \cdots + x^{(p-1)p}$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ ist.

Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis von Lemma 2.6.10 vor: Verwenden Sie den Ring-Isomorphismus $\phi\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[y], g(x) \mapsto g(y+1)$ und überprüfen Sie, dass sich das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium auf $\phi(f)$ anwenden lässt.