

Erinnerung: Wenn wir \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} als Gruppe auffassen, ist immer $+$ als Verknüpfung gemeint. Wenn wir \mathbb{Q}^\times , \mathbb{R}^\times als Gruppe auffassen, ist \cdot als Verknüpfung gemeint.

Aufgabe 1 (1+1+2 Punkte):

Welche der folgenden Mengen H sind Untergruppen der jeweiligen Gruppe G ?

- (a) $G = \mathbb{Z}$, $H = \{2a + 1 \mid a \in \mathbb{Z}\}$
- (b) $G = \mathbb{R}^\times$, $H = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a \leq 1\}$.
- (c) G beliebig, $a \in G$ ein beliebiges (festes) Element, $H = \{x \in G \mid ax = xa\}$.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Wir betrachten in \mathbb{Q} die Untergruppe $H = \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle$. Zeigen Sie, dass H zyklisch ist und geben Sie einen Erzeuger von H an.

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen? Bei den Abbildungen, die Homomorphismen sind: Geben Sie auch das Bild und den Kern an.

- (a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
- (b) $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}^\times, x \mapsto x^2$
- (c) $\text{GL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R}), A \mapsto A^2$

Aufgabe 4 (1+1+2 Punkte):

Seien $a, b, c \in \text{Sym}(\mathbb{Z})$ (siehe Beispiel 1.1.7) gegeben durch $a(n) = -n$, $b(n) = 1 - n$, $c(n) = 1 + n$ für $n \in \mathbb{Z}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Untergruppen $\langle a \rangle$ und $\langle b \rangle$ von $\text{Sym}(\mathbb{Z})$ jeweils nur aus zwei Elementen bestehen.
- (b) Zeigen Sie, dass $\langle c \rangle$ isomorph zu \mathbb{Z} ist.
- (c) Zeigen Sie, dass $\langle c \rangle \leq \langle a, b \rangle$ gilt.
Hinweis: Es reicht, $c \in \langle a, b \rangle$ zu zeigen. Warum?

Aufgabe 5 (2+1 Punkte):

Sei $f: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \triangleleft G$ ein Normalteiler.

- (a) Zeigen Sie: Ist f surjektiv, so ist auch $f(N)$ ein Normalteiler von H .
- (b) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass in (a) die Bedingung „ f surjektiv“ wirklich benötigt wird.

Aufgabe 6 (1+2+1 Punkte):

Wir betrachten die Teilmenge $H = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(1) = 1\}$ der symmetrischen Gruppe S_4 (siehe Beispiel 1.1.7).

- (a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von S_4 ist.
- (b) Sei $\tau \in S_4$ gegeben durch $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 1$. Bestimmen Sie die Links- und Rechtsnebenklassen τH und $H\tau$.
- (c) Ist H ein Normalteiler von S_4 ?