Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Präsenzblatt 13

Präsenzaufgabe 13.1

Sei Γ die durch $\gamma : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisierte Kurve, wobei $\gamma(t) := (t,\ \cosh(t))$ für $0 \leq t \leq 1$. Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

a) $f(x,\, y) := x$ für $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ und

b) $f(x,\, y) := y$ für $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$

das Kurvenintegral 1. Art $\int_\Gamma f\mathrm{d}s$.

Präsenzaufgabe 13.2

Betrachten Sie die 1-Form $\omega := f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y$ für

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(x,\, y) := \frac{1}{x^2 + y^2}(x - y,\ x + y), \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\}.$$

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\Gamma \omega$ für die durch $\gamma : [-\pi,\, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisierte Kurve Γ, wobei $\gamma(t) := (\cos(t),\ \sin(t))$ für $-\pi \leq t \leq \pi$.

b) Man sieht leicht ein, dass ω lokal exakt ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\}$. Ist ω exakt auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\}$? Falls nicht, geben Sie ein Gebiet $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^2$ an, so dass ω exakt ist auf D.

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am Mittwoch, den 24. Januar und Donnerstag, den 25. Januar 2024 bearbeitet.