Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Präsenzblatt 11

Präsenzaufgabe 11.1

Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $M := \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1, \ x_n > 0 \}$.

a) Geben Sie $m \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$, offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen C^ℓ-Diffeomorphismus $\varphi : U \longrightarrow V$ an, so dass $M \subseteq U$ und $\varphi(M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{ 0 \})$.

b) Geben Sie $m \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$, eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^m$ und $f \in C^\ell(D, \mathbb{R}^{n-m})$ an mit $M = \operatorname{graph}(f)$.

c) Geben Sie $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$, eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g \in C^\ell(W, \mathbb{R}^k)$ an, so dass 0 ein regulärer Wert von g ist und $M = g^{-1}(0)$.

Welche Bedeutungen haben m, k und ℓ?

Präsenzaufgabe 11.2

Betrachten Sie für $0 < \rho < r$ das „Spiralband“ $M := \psi(W)$, wobei $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben ist als

$$\psi(s, t) := ((r + \rho\cos(s))\cos(t), \ (r + \rho\cos(s))\sin(t), \ t), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

und $W := (0, \pi) \times \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie für $(s, t) \in W$ eine Basis des Tangentialraums T_pM am Punkt $p = \psi(s, t)$.

Hinweise: Für Teil a) geben Sie offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^3$ und einen C^∞-Diffeomorphismus $\varphi : U \longrightarrow V$ an, sodass $M \subseteq U$ und $\varphi(M) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{ 0 \})$.

Für Teil b) betrachten Sie geeignete Kurven γ, die in M durch den Punkt p verlaufen.

Zur Konstruktion von U, V und φ gehen Sie wie folgt vor:

(i) Konstruieren Sie zunächst eine C^∞-Abbildung $\Phi = (\xi, \eta, \zeta) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und stellen Sie dabei sicher, dass $\Phi(M) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{ 0 \}$, z. B. durch die Wahl $\zeta(x, y, z) := y\cos(z) - x\sin(z)$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Stellen Sie sicher, dass Φ bijektiv ist mit $\det \Phi' \neq 0$, z. B. durch die Wahlen $\xi(x, y, z) := x\cos(z) + y\sin(z)$ und $\eta(x, y, z) = z$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Bestimmen Sie $\Phi(M)$ und eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\Phi(M) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{ 0 \})$.

(iv) Setzen Sie $U := \Phi^{-1}(V)$ und $\varphi := \Phi|_U$.

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am Mittwoch, den 10. Januar und Donnerstag, den 11. Januar 2024 bearbeitet.