Präsenzblatt 10

Präsenzaufgabe 10.1

Ist die Massendichte eines Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^3$ durch $\rho : K \longrightarrow (0, \infty)$ gegeben, so erhält man seinen Schwerpunkt $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ als

$$\bar{x}_k = \frac{1}{m}\left(\int_K x_k \rho(x)\,\mathrm{d}x \right), \qquad k = 1, 2, 3,$$

mit der Gesamtmasse $m := \int_K \rho(x)\,\mathrm{d}x$. Berechnen Sie für $a > 0$ und $\rho \equiv 1$ den Schwerpunkt des Kugeloktanten

$$K = \left\{ x \in (0, \infty)^3 \,:\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < a^2 \right\}$$

mit Hilfe einer geeigneten Transformation.

Präsenzaufgabe 10.2

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $m := \inf\{ \mu(A) \,:\, A \in \mathcal{A},\ \mu(A) > 0 \} \in [0, \infty]$. Zeigen Sie:

a) Ist $m > 0$, dann gibt es für jede μ-integrierbare Funktion $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ein $C > 0$ so, dass $\mu(\{ |f| > C \}) = 0$.

b) Ist $m > 0$, dann gilt $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für $1 \leq p < q \leq \infty$.

Hinweis: In Teil b) sollte der Fall $q = \infty$ separat betrachtet werden.

Bemerkung: Für $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit dem Zählmaß μ ist $m = 1$. Dies liefert die bekannten Inklusionen

$$\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^q \subseteq \ell^\infty, \qquad 1 \leq p < q \leq \infty.$$

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am Mittwoch, den 20. Dezember und Donnerstag, den 21. Dezember 2023 bearbeitet.