Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Präsenzblatt 9

Präsenzaufgabe 9.1

Sei $r > 0$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_Q (x + y^2)\sin(z)\,\mathrm{d}(x,\, y,\, z)$ für den Quader $Q = [0,\, 1] \times [-1,\, 1] \times [0,\, \pi]$;

b) $\int_A \frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{d}(x,\, y)$ für die Fläche $A := \{\, (x,\, y) \in [0,\, \infty)^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq r^2 \,\}$.

Präsenzaufgabe 9.2

Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\Phi : U := (0,\, \infty) \times (-\pi,\, \pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r,\, \lambda,\, z) = (r\cos(\lambda),\ r\sin(\lambda),\ z)$$

und zeigen Sie:

a) $V := \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ ist offen und $\Phi : U \longrightarrow V$ ist ein C^1-Diffeomorphismus.

b) $\det \Phi'(r,\, \lambda,\, z) = r > 0$.

Berechnen Sie für $\rho,\, h > 0$ mit Hilfe von Zylinderkoordinaten das Integral

$$\int_{Z_{\rho,h}(0)} (x^2 + y^2) z^2 e^{z^3}\,\mathrm{d}(x,\, y,\, z),$$

wobei

$$Z_{\rho,h}(0) := B_\rho(0) \times (-h,\, h) = \left\{ (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 < \rho^2,\ -h < z < h \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

HINWEIS: Sie können Präsenzaufgabe 3 verwenden.

Präsenzaufgabe 9.3

Seien $m,\, n \in \mathbb{N}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sowie $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^m-Abbildung. Es gelte weiterhin:

(i) f ist injektiv;

(ii) $\det f'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Zeigen Sie: $V := f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen und $f : U \longrightarrow V$ ist ein C^m-Diffeomorphismus.

Hinweis: Für $m,\, n \in \mathbb{N}$ ist eine Abbildung $f : \Omega \longrightarrow W$ zwischen offenen Mengen $\Omega,\, W \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann ein C^m-Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und f und f^{-1} C^m-Abbildungen sind.

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am Mittwoch, den 13. Dezember und Donnerstag, den 14. Dezember 2023 bearbeitet.