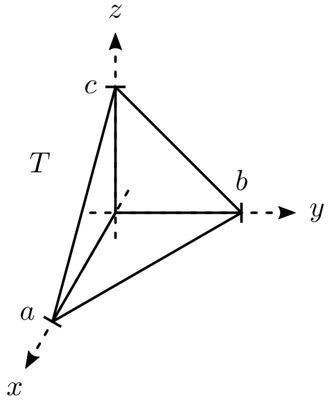
Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

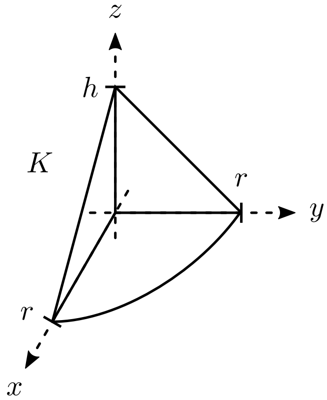
Wintersemester 2023/2024

Präsenzblatt 8

Präsenzaufgabe 8.1

Seien a, b, c, h, $r > 0$. Bestimmen Sie jeweils nach dem Prinzip von Cavalieri das Volumen des Tetraeders $T \subseteq \mathbb{P}^3$ bzw. des Viertelkegels $K \subseteq \mathbb{P}^3$, wobei $\mathbb{P} := (0, \infty)$,





$T := \{\, (x, y, z)^T \in \mathbb{P}^3 \,:\, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} < 1 \,\}$ und $K := \{\, (x, y, z)^T \in \mathbb{P}^3 \,:\, \sqrt{x^2 + y^2} < (1 - \frac{z}{h})r \,\}$.

Hinweise: Vgl. Hinweise zu Übungsaufgabe 1.

Präsenzaufgabe 8.2

Seien μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$f(y) = \int_{\mathbb{R}} \sin(xy)\,\mathrm{d}\mu(x), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie: Ist $|\cdot|$ μ-integrierbar, dann ist f differenzierbar; bestimmen Sie f'.

b) Zeigen Sie: Ist $|\cdot|^2$ μ-integrierbar, dann ist f zweimal differenzierbar; bestimmen Sie f''.

Präsenzaufgabe 8.3

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Präsenzaufgabe 8.4

Vertauschen Sie bei den iterierten Integralen

$$\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

jeweils die Integrationsreihenfolge.

Hinweis: Die Aufgabe besteht darin, die Integrationsgrenzen richtig zu transformieren.

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am Mittwoch, den 6. Dezember und Donnerstag, den 7. Dezember 2023 bearbeitet.