Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Präsenzblatt 6

Präsenzaufgabe 6.1

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\alpha \geq 0$ und $f, g \in \mathcal{T}^+$. Zeigen Sie, dass $\alpha f,\ \max\{f, g\} \in \mathcal{T}^+$. Geben Sie jeweils eine Normaldarstellung an.

Präsenzaufgabe 6.2

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und eine numerische Funktion $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ seien $A_0^n, \dots, A_{n2^n}^n \subseteq \Omega$ und u_n für $n \in \mathbb{N}$ definiert wie in Satz 6.7; vgl. Übungsaufgabe 2. Skizzieren Sie u_1 und u_2 für $\Omega = [0, \frac{\pi}{2})$ und $f(x) = \tan(x)$ für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

Präsenzaufgabe 6.3

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann ist $\mu := \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k$ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie: Eine $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktion $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann μ-integrierbar, wenn $\sum_{k\in\mathbb{N}} \int |f| \mathrm{d}\mu_k < \infty$ und in diesem Fall gilt:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int f \,\mathrm{d}\mu_k.$$

Hinweise: Es ist $\mu = \lim_{k\to\infty} \nu_k$ für *die Maße* $\nu_k := \sum_{j=1}^k \mu_j$ für $k \in \mathbb{N}$.
Daher ist μ tatsächlich ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ nach Übungsaufgabe 3.1.
Dies muss hier nicht gezeigt werden.

Sie können verwenden, dass für eine in beiden Indizes monoton wachsende Doppelfolge $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, \infty]$ stets gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{m,n}.$$

Vgl. auch die Argumentation bei Übungsaufgabe 3.1.

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am Mittwoch, den 22. November und Donnerstag, den 23. November 2023 bearbeitet.