Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Präsenzblatt 5

Präsenzaufgabe 5.1

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum.

a) Gibt es numerische Funktionen $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ für die $|f|$ messbar ist, f jedoch nicht?

b) Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, so dass $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig ist. Sei $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbar und $N := \{ f = 0 \} \in \mathcal{A}$ eine μ-Nullmenge. Sei $g : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ so, dass $g(\omega) = 1/f(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega \setminus N$. Zeigen Sie, dass g messbar ist.

Hinweis: Für Teil b) ist wie üblich $1/\infty := 1/(-\infty) := 0$.

Präsenzaufgabe 5.2

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass $\lambda_n(\rho A) = \rho^n \lambda_n(A)$ für alle $\rho > 0$ und alle Lebesgue-messbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt. Hierbei ist $\rho A = \{ \rho x : x \in A \}$. Für die folgenden Teilaufgaben sei $\rho > 0$ fixiert.

a) Die Abbildung $T_\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $T_\rho x := \rho^{-1} x$ für $x \in \mathbb{R}^n$ ist linear und stetig.

b) Für $\mu : \mathcal{B}_n \longrightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(A) := \rho^{-n} \lambda_n(\rho A)$ für $A \in \mathcal{B}_n$ gilt $\mu = \rho^{-n} (\lambda_n|_{\mathcal{B}_n})^{T_\rho}$.

c) μ ist ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ mit $\mu|_{I_n} = \lambda_n|_{I_n}$.

d) $\mu = \lambda_n|_{\mathcal{B}_n}$, d. h. für alle $A \in \mathcal{B}_n$ ist $\lambda_n(\rho A) = \rho^n \lambda_n(A)$.

e) Für alle $A \in \mathcal{L}_n$ ist $\lambda_n(\rho A) = \rho^n \lambda_n(A)$.

Hinweise: Wie üblich bezeichnet

$$I_n := \left\{ (x, y] : x, y \in \mathbb{R}^n, \ x_j \le y_j \text{ für } j = 1, \ldots, n \right\}$$

den Semi-Ring der halboffenen Quader. Nach Präsenzaufgabe 3.2 b) ist $\sigma(I_n) = \mathcal{B}_n$.

Für Teil d) denken Sie an den Eindeutigkeitssatz 3.9.

Für Teil e) beachten Sie: Nach Satz 5.12 und Übungsaufgabe 3.2 ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann Lebesgue-messbar, wenn $E, F \in \mathcal{B}_n$ existieren mit $E \subseteq A \subseteq F$ und $\lambda_n(F \setminus E) = 0$. In diesem Fall können E und F nach Satz 5.10 so gewählt werden, dass $\lambda_n(E) = \lambda_n(A) = \lambda_n(F)$.

Präsenzaufgabe 5.3

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) := (x, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ für $x \in \mathbb{R}$ zwar $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$-messbar ist, aber nicht $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$-messbar.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass Mengen $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}_1$ existieren. Betrachten Sie für eine solche Menge A dann die Menge $B := A \times \{ 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2$. Ist $B \in \mathcal{L}_2$?

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am Mittwoch, den 15. November und Donnerstag, den 16. November 2023 bearbeitet.