Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/2024

Präsenzblatt 4

Präsenzaufgabe 4.1

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ messbar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $f(\Omega) \subseteq U$ und $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass $g \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ messbar ist.

Hinweis: Auf dem $\mathbb{R}^n$ wird, wenn nichts anderes angegeben ist, die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ betrachtet.

Präsenzaufgabe 4.2

Seien Ω und Ω' Mengen sowie $f : \Omega \to \Omega'$. Zeigen Sie: Für $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ ist $f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}')) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{M}'))$.

Hinweis: Sie können Übungsaufgabe 2 a) verwenden. Denken Sie an Lemma 4.4.

Präsenzaufgabe 4.3

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ Messräume und

$$\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n = \Big\{ A_1 \times \cdots \times A_n \,:\, A_j \in \mathcal{A}_j \text{ für } j = 1, \ldots, n \Big\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n \subseteq \sigma(\bigcup_{j=1}^n \pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j))$.

b) $\bigcup_{j=1}^n \pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n)$.

c) $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n)$.

Hinweise: Für Teil a): Sind $A_j \in \mathcal{A}_j$ für $j = 1, \ldots, n$, so ist

$$\pi_j^{-1}(A_j) = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times A_j \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_n$$

und damit

$$\bigcap_{j=1}^n \pi_j^{-1}(A_j) = A_1 \times \cdots \times A_n,$$

Für Teil b) reicht es zu zeigen, dass $\pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j) \subseteq \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Präsenzaufgabe 4.4

Seien Ω eine überabzählbare Menge, $\mathcal{E} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$ und $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E})$. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \subsetneq \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

Hinweise: Nach Übungsaufgabe 1.2 ist $\sigma(\mathcal{E}) = \{ A \subseteq \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar} \}$.
Bestimmen Sie zunächst $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ und $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E})$.
Die Inklusion $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ folgt aus Übungsaufgabe 3 a).
Beachten Sie, dass $A \times \Omega = \pi_1^{-1}(A) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ für jedes $A \in \mathcal{A}$.

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am Mittwoch, den 8. November und Donnerstag, den 9. November 2023 bearbeitet.