Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Präsenzblatt 3

Präsenzaufgabe 3.1

Seien Ω eine Menge, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Semi-Ring und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie, dass paarweise disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{S}$ existieren, sodass jede der Mengen A_k die Vereinigung gewisser B_j ist.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden: Zu $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ existieren paarweise disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{S}$ so, dass

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{m} C_k.$$

Präsenzaufgabe 3.2

Betrachten Sie die Mengensysteme

$$J_n := \Big\{ (x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R}^n,\, x_j \le y_j \text{ für } j = 1, \ldots, n \Big\},\ I_n := \Big\{ (x, y] \,:\, x, y \in \mathbb{R}^n,\, x_j \le y_j \text{ für } j = 1, \ldots, n \Big\}$$

und zeigen Sie:

a) Es gilt $\sigma(I_n) = \sigma(J_n)$.

b) I_n ist ein Semi-Ring mit $\sigma(I_n) = \mathcal{B}_n$.

Hinweis: Für Teil a) vgl. den Beweis von $\sigma(\mathcal{M}_3) = \sigma(\mathcal{M}_4)$ in Übungsaufgabe 1.3.
Für Teil b) beachte Übungsaufgabe 3 a) und, dass $\mathcal{M}_4 \subseteq I_n$ und $J_n \subseteq \mathcal{O}$ mit $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{M}_4) = \mathcal{B}_n$.

Präsenzaufgabe 3.3

Seien Ω eine Menge, $M \subseteq \Omega$ und $\mathcal{S} := \{\varnothing\} \cup \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$. Weiterhin sei $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, \infty]$ gegeben durch $\mu(\varnothing) = 0$ sowie $\mu(\{\omega\}) = 1$, falls $\omega \in M$, und $\mu(\{\omega\}) = 0$, sonst.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ ein Semi-Ring ist.

b) Zeigen Sie, dass μ endlich additiv ist.

c) Konstruieren Sie ein Maß ν auf dem Messraum $(\Omega, \sigma(\mathcal{S}))$ mit $\nu|_{\mathcal{S}} = \mu$.

d) Geben Sie eine Bedingung an Ω an, die sicherstellt, dass das Maß ν aus Teil c) eindeutig ist.

e) Zeigen Sie, dass für überabzählbares Ω und endliches M mindestens zwei verschiedene Maße ν und ν' auf dem Messraum $(\Omega, \sigma(\mathcal{S}))$ existieren mit $\nu|_{\mathcal{S}} = \nu'|_{\mathcal{S}} = \mu$.

Hinweis: Nach Übungsaufgabe 1.2 ist $\sigma(\mathcal{S}) = \{A \subseteq \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$.
Für Teil c) überlegen Sie zunächst, was $\nu(A)$ für abzählbares $A \subseteq \Omega$ sein muss.
Für Teil e) überlegen Sie, wie $\nu'(A) \neq \nu(A)$ für überabzählbares $A \in \sigma(\mathcal{S})$ sein kann.

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am Donnerstag, den 2. November 2023 bearbeitet.