Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Präsenzblatt 2

Präsenzaufgabe 2.1

Seien Ω eine Menge, $M \subseteq \Omega$ und das M-Zählmaß $\mu_M : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$ gegeben als $\mu_M(A) = |A \cap M|$ für jede Menge $A \subseteq \Omega$, für die $A \cap M$ endlich ist, und $\mu_M(A) = \infty$ sonst.

a) Zeigen Sie, dass durch μ_M ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ gegeben ist. Ist $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu_M)$ vollständig?

b) Zeigen Sie, dass μ_M genau dann σ-endlich ist, wenn M abzählbar ist.

Präsenzaufgabe 2.2

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum.

a) Zeigen Sie, dass für $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0, \infty]$ und eine Folge von Maßen $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ durch $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k$ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben ist.

b) Stellen Sie für den Fall $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ einen Zusammenhang zwischen dem Zählmaß $\mu_{\mathbb{N}}$ und der Folge von Dirac-Maßen $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ her.

Präsenzaufgabe 2.3

Seien Ω eine überabzählbare Menge, $\mathcal{A} = \{\, A \subseteq \Omega \;:\; A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar} \,\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ die σ-Algebra der (co-) abzählbaren Mengen und $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ gegeben als $\mu(A) = 0$ für abzählbares $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(A) = \infty$ sonst.

a) Zeigen Sie, dass durch μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum ist.

Hinweis: Nach Übungsaufgabe 1.2 ist $\mathcal{A}$ tatsächlich eine σ-Algebra über Ω.

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am Mittwoch, den 25. Oktober und Donnerstag, den 26. Oktober 2023 bearbeitet.