Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

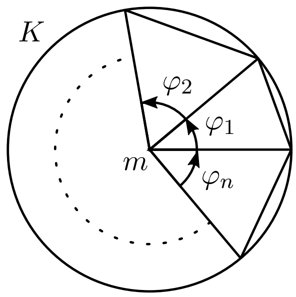
Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1 (6 Punkte)
Sei $n \geq 3$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange den Flächeninhalt des größten in den Einheitskreis

$$K := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1 \}$$

einbeschriebenen Polygons mit n Ecken.



Hinweis: Ein in K einbeschriebenes Polygon mit n Ecken, das den Mittelpunkt $m = (0, 0)$ von K enthält, ist durch die n Mittelpunktswinkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ (bis auf Rotation) eindeutig bestimmt. Wie hängt der Flächeninhalt des Polygons von den φ_k ab? Welche Nebenbedingung erfüllen die φ_k?

Hinweise: Es ist für die Aufgabe ausreichend Polygone zu betrachten, die den Mittelpunkt $m = (0, 0)$ enthalten. (Zusatzfrage: Wieso?)
Sie können ohne Beweis verwenden, dass die Funktion

$$f : \mathbb{N}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(n) := \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

monoton wachsend in n ist und für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m \geq 2$ gilt, dass

$$\frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) > \frac{m}{2} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

Aufgabe 12.2 (6 Punkte)
Betrachten Sie die Funktionen $f,\, g : (0, \infty)^n \longrightarrow \mathbb{R}$, die gegeben sind als

$$f(x) := \prod_{k=1}^{n} x_k, \qquad g(x) := \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad x_1, \ldots, x_n > 0,$$

und bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikatorregel von Lagrange alle Extremstellen x von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 1$.

Hinweis: Sie können die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel verwenden:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \tfrac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n), \qquad x_1, \ldots, x_n \geq 0.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 12.3 (3+3 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Weglänge $L(\gamma)$ des Weges

a) $\gamma : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, wobei $a < b$ und $\gamma(t) := (e^t \cos(t),\ e^t \sin(t))$ für $a \leq t \leq b$;

b) $\gamma : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, wobei $\gamma(t) := (t,\ e^t,\ 1 - e^t)$ für $0 \leq t \leq 1$.

Abgabe bis zum Dienstag, den 23. Januar 2024, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Donnerstag, den 25. Januar 2024, um 16.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5M statt.