Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1 (6 Punkte)
Sei $\gamma : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $\gamma(t) = 0$ für $-1 < t \leq 0$ und $\gamma(t) = t^2$ für $0 < t < 1$. Zeigen Sie, dass $M := \operatorname{graph}(\gamma)$ eine eindimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist, aber keine C^2-Untermannigfaltigkeit.

Aufgabe 11.2 (3+3 Punkte)
Betrachten Sie die Wendelfläche $M := \psi(\mathbb{R}^2)$, wobei $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben ist als

$$\psi(s, t) := (s\cos(t),\ s\sin(t),\ t), \qquad\qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie für $s, t \in \mathbb{R}$ eine Basis des Tangentialraums T_pM am Punkt $p = \psi(s, t)$.

Hinweise: Für Teil a) geben Sie einen C^∞-Diffeomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ an, sodass $\varphi(M) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.
Für Teil b) betrachten Sie geeignete Kurven γ, die in M durch den Punkt p verlaufen.

Aufgabe 11.3 (3+3 Punkte)
Betrachten Sie für $0 < \rho < r$ den Ringtorus $M := \psi(\mathbb{R}^2)$, wobei $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben ist als

$$\psi(s, t) := ((r + \rho\cos(s))\cos(t),\ (r + \rho\cos(s))\sin(t),\ \rho\sin(s)), \qquad\qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie für $s, t \in \mathbb{R}$ eine Basis des Tangentialraums T_pM am Punkt $p = \psi(s, t)$.

Hinweise: Für Teil a) geben Sie eine C^∞-Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ an, so dass $M = g^{-1}(c)$, wobei $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von g ist.

Abgabe bis zum Dienstag, den 16. Januar 2024, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Donnerstag, den 18. Januar 2024, um 16.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5M statt.