Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1 (3+3 Punkte)
Betrachten Sie für die Radien $a_1, \ldots, a_n > 0$ das Ellipsoid

$$E_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{a_k^2} < 1 \right\}.$$

a) Geben Sie einen C^1-Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ an mit $\Phi(B_1(0)) = E_n$.

b) Bestimmen Sie das Volumen $\lambda_n(E_n)$ in den Fällen $n = 2, 3$.

Hinweis: Nach Beispiel 9.5 b) ist $\lambda_2(B_1(0)) = \pi$ und $\lambda_3(B_1(0)) = \frac{4}{3}\pi$.

Aufgabe 10.2 (2+2+2 Punkte)
Betrachten Sie den Körper

$$K := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \tfrac{1}{2}(1 + z^2) < x^2 + y^2 < 2(1 + z^2),\ 0 < z < 2 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie das Volumen $\lambda_3(K)$ mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri.

b) Seien $U := (1, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (0, \infty)$ und $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben als

$$\Phi(r, \varphi, s) := \left(sr\cos(\varphi),\ sr\sin(\varphi),\ \sqrt{r^2 - 1} \right), \qquad 1 < r < \infty,\ -\pi < \varphi < \pi,\ 0 < s < \infty.$$

Bestimmen Sie $\Phi^{-1}(K)$ und berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(K)$ mit Hilfe des Transformationssatzes unter Verwendung der Transformation Φ. Verwenden Sie ohne Beweis, dass die Abbildung $\Phi : U \longrightarrow V := \Phi(U)$ ein C^1-Diffeomorphismus ist mit $\det \Phi'(r, \varphi, s) = -\frac{sr^3}{\sqrt{1-r^2}}$ for $(r, \varphi, s) \in U$.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes unter Verwendung der Transformation Φ das Integral

$$\int_K x^2 z \,\mathrm{d}(x, y, z).$$

Aufgabe 10.3 (3+3 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $M := \sup\{\, \mu(A) \,:\, A \in \mathcal{A},\ \mu(A) < \infty \,\} \in [0, \infty]$. Zeigen Sie:

a) Für jede μ-integrierbare Funktion $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ gilt $\mu(\{\, f \neq 0 \,\}) \leq M$.

b) Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endlich und $M < \infty$, dann gilt

$$\|f\|_q \leq M^{1/q - 1/p} \|f\|_p, \qquad f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \qquad 1 \leq q < p \leq \infty,$$

d. h. insbesondere $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für $1 \leq q < p \leq \infty$.

Hinweise: In Teil b) sollte der Fall $p = \infty$ (dann ist $1/p := 0$) separat betrachtet werden.
Für den Fall $p < \infty$ ist die Hölder'sche Ungleichung hilfreich.

Bemerkung: Ist $\mu(\Omega) < \infty$, dann gilt $M = \mu(\Omega) < \infty$. Dies liefert die in diesem Fall bekannten Inklusionen

$$L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \qquad 1 \leq q < p \leq \infty.$$

Abgabe bis zum Dienstag, den 9. Januar 2024, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Donnerstag, den 11. Januar 2024, um 16.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5M statt.