**Analysis III**
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/2024

# Übungsblatt 9

**Aufgabe 9.1** (3+3 Punkte)

Sei $r > 0$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_Q \frac{z}{x+y} \, \mathrm{d}(x,\, y,\, z)$ für den Quader $Q = [0,\, 1] \times [1,\, 3] \times [0,\, 4]$;

b) $\int_A xy \, \mathrm{d}(x,\, y)$ für die Fläche $A \subseteq [0,\, r] \times [0, r^2]$, die von den Kurven $y = \frac{1}{r}x^3$ und $y = x^2$ begrenzt wird.

**Aufgabe 9.2** (2+2+2 Punkte)

a) Seien $g_1,\, \dots,\, g_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$f(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_m) := g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \cdot \ldots \cdot g_m(x_m), \qquad x = (x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Zeigen Sie: $f$ ist integrierbar und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^m} f \, \mathrm{d}\lambda_m = \left(\int_{\mathbb{R}} g_1 \, \mathrm{d}\lambda_1\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} g_2 \, \mathrm{d}\lambda_1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} g_m \, \mathrm{d}\lambda_1\right).$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe einer Transformation in Polarkoordinaten, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}(x,\, y) = \int_V e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}(x,\, y) = \pi,$$

wobei $V := \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty,\, 0] \times \{\, 0\,\})$ die geschlitzte Ebene bezeichnet.

*Hinweis:* Verwenden Sie die Polarkoordinaten $(r,\, \lambda) \mapsto (r\cos(\lambda),\, r\sin(\lambda)) : U := (0,\, \infty) \times (-\pi,\, \pi) \longrightarrow V$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Abbildung surjektiv ist.

c) Zeigen Sie: $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} \, \mathrm{d}x = \pi^{\frac{n}{2}}$.

**Aufgabe 9.3** (6 Punkte)

Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\Phi : U := (0,\, \infty) \times (-\pi,\, \pi) \times (-\tfrac{\pi}{2},\, \tfrac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r,\, \lambda,\, \varphi) = (r\cos(\lambda)\cos(\varphi),\, r\sin(\lambda)\cos(\varphi),\, r\sin(\varphi))$$

und zeigen Sie:

a) $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\det \Phi'(r,\, \lambda,\, \varphi) = r^2\cos(\varphi) > 0$,

b) $V := \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ ist offen und $\Phi : U \longrightarrow V$ ist ein $C^1$-Diffeomorphismus.

Berechnen Sie für $q > \rho > 0$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten das Integral $\int_{B_\rho(0)} \frac{1}{|(x,y,z)-(0,0,q)|} \, \mathrm{d}(x,\, y,\, z)$.

*Hinweis:* Sie können Präsenzaufgabe 3 verwenden.
Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\Phi\left((0, \rho) \times (-\pi,\, \pi) \times (-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2})\right)$ bis auf eine Nullmenge mit $B_\rho(0)$ übereinstimmt.

Bitte wenden!

**Weihnachtsaufgabe:** (Ein weihnachtliches Gedicht, 3 Bonuspunkte)
Verfassen Sie ein (weihnachtliches) Gedicht mit maximal 40 Worten, das einschlägige Begriffe und Namen aus der Vorlesung (z. B. Maß, Semi-Ring, $\sigma$-Algebra, $\mu$-fast überall, Lebesgue, Cavalieri, ...) enthält. Geben Sie Ihr Gedicht auf einem separaten losen Blatt, beschriftet mit Ihrem Namen in der Vorlesung am 19.12.2023 ab. Die kreativsten Lösungen werden in der Vorlesung am 21.12.2023 mit hausgemachtem Gebäck prämiert.

Abgabe bis zum Dienstag, den 19. Dezember 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Donnerstag, den 21. Dezember 2023, um 16.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5M statt.