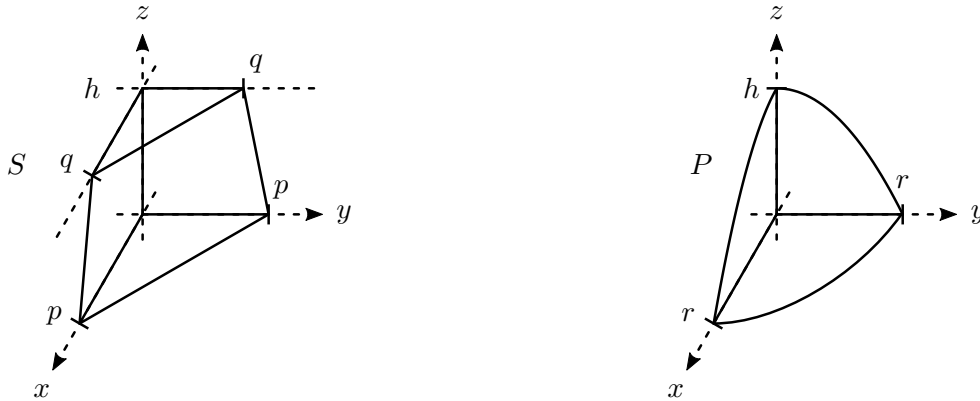


Übungsblatt 8

Wintersemester 2023/2024

Aufgabe 8.1 (6 Punkte)

Seien $h, p, q, r > 0$. Bestimmen Sie jeweils nach dem Prinzip von Cavalieri das Volumen des Pyramidenstumpfs $S \subseteq \mathbb{P}^3$ bzw. des Viertelparaboloids $P \subseteq \mathbb{P}^3$, wobei $\mathbb{P} := (0, \infty)$,



$$S := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{P}^3 : x + y < \left(1 - \frac{z}{h}\right)p + \frac{z}{h}q, z < h \right\}$$

und

$$P := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{P}^3 : x^2 + y^2 < \left(1 - \frac{z}{h}\right)r^2 \right\}.$$

Hinweise: Für $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ist die Menge $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{P}^2 : \alpha x + \beta y < \gamma\}$ ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen $\frac{\gamma}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\beta}$ und Flächeninhalt $\lambda_2(D) = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}$.

Für $\rho > 0$ ist die Menge $V = \{(x, y) \in \mathbb{P}^2 : x^2 + y^2 < \rho^2\}$ ein Viertelkreis mit Radius ρ und Flächeninhalt $\lambda_2(V) = \frac{1}{4} \pi \rho^2$.

Aufgabe 8.2 (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $g \in C^m(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger, dh. der Abschluss der Menge $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ ist kompakt. Sei $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$u(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x) dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $u \in C^m(\mathbb{R})$ ist und bestimmen Sie die Ableitungen von u bis zur Ordnung m .

Aufgabe 8.3 (6 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x+y)^{-3}(x-y)$ für $0 < x, y < 1$. Zeigen Sie: Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sind die Funktionen $f(x, \cdot)$ und $f(\cdot, y)$ über \mathbb{R} integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) d\lambda_1(y) d\lambda_1(x) \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) d\lambda_1(x) d\lambda_1(y)$$

Warum ist dies kein Widerspruch zum Satz von Fubini?

Abgabe bis zum Dienstag, den 12. Dezember 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
 Die Besprechung der Aufgaben findet am Donnerstag, den 7. Dezember 2023, um 16.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5M statt.