

## Übungsblatt 7

### Aufgabe 7.1 (5 Punkte)

Seien  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  eine  $\mu$ -integrierbare numerische Funktion mit  $f > 0$   $\mu$ -f. ü. in  $\Omega$ . Zeigen Sie: Für alle  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) > 0$  ist  $\int_A f d\mu > 0$ .

### Aufgabe 7.2 (7 Punkte)

Seien  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $\emptyset \neq A \in \mathcal{A}$ , sowie  $\mathcal{A}' := \mathcal{A}|_A$  die Spur- $\sigma$ -Algebra und  $\mu_A := \mu|_{\mathcal{A}'}$  das Spur-Maß. Die Abbildung  $f : A \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  sei  $\mathcal{A}'$ - $\bar{\mathcal{B}}_1$ -messbar. Zeigen Sie: Die triviale Fortsetzung

$$F : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, \quad F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \in \Omega \setminus A, \end{cases} \quad x \in \Omega,$$

ist  $\mathcal{A}$ - $\bar{\mathcal{B}}_1$ -messbar.  $F$  ist genau dann  $\mu$ -integrierbar, wenn  $f$   $\mu_A$ -integrierbar ist, und in diesem Fall gilt:

$$\int_{\Omega} F d\mu = \int_A f d\mu_A.$$

*Hinweis:* Verwenden Sie das Prinzip der algebraischen Induktion.

### Aufgabe 7.3 (2+2+2 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Folge von  $\lambda_1$ -integrierbaren Funktionen  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an, sodass  $f_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  f. ü. auf  $\mathbb{R}$  und

- $\int_{\mathbb{R}} f_k d\lambda_1 \rightarrow 73$  für  $k \rightarrow \infty$ ;
- $\int_{\mathbb{R}} f_k d\lambda_1 \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ ;
- $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k d\lambda_1 = -1$  und  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k d\lambda_1 = 1$ .

Abgabe bis zum Dienstag, den 5. Dezember 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.

Die Besprechung der Aufgaben findet am Donnerstag, den 7. Dezember 2023, um 16.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5M statt.