Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 (6 Punkte)
Seien $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ ein Maßraum und $f,\, g \in \mathcal{T}^+$. Zeigen Sie, dass $f \cdot g, \min\{\, f,\, g\,\} \in \mathcal{T}^+$. Geben Sie jeweils eine Normaldarstellung an.

Aufgabe 6.2 (6 Punkte)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und $f : \Omega \longrightarrow [0,\, \infty]$ eine numerische Funktion. Wie in Satz 6.7 seien

$$A_j^n := \begin{cases} \{\, \frac{j}{2^n} \leq f < \frac{j+1}{2^n}\,\}, & j = 0,\, \ldots,\, n2^n - 1, \\ \{\, f \geq n\,\}, & j = n2^n, \end{cases} \qquad u_n := \sum_{j=0}^{n2^n} \frac{j}{2^n} \chi_{A_j^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Skizzieren Sie jeweils u_1 und u_2 für

a) $\Omega = [0,\, \pi]$ und $f(x) = \sin(x)$ für $0 \leq x \leq \pi$;

b) $\Omega = (0,\, 1]$ und $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ für $0 < x \leq 1$.

Aufgabe 6.3 (6 Punkte)
Betrachten Sie den Maßraum $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ mit $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und dem Zählmaß μ, das gegeben ist durch $\mu(A) = |A|$, falls $A \subseteq \mathbb{N}$ endlich ist, und $\mu(A) = \infty$ für alle unendlichen Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ und $f : \mathbb{N} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ gegeben als $f(n) := a_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f genau dann μ-integrierbar ist, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, und, dass in diesem Fall gilt:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Abgabe bis zum Dienstag, den 28. November 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Donnerstag, den 30. November 2023, um 16.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5M statt.