Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)
Seien $(\Omega,\, \mathcal{A})$ und $(\Omega',\, \mathcal{A}')$ Messräume und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_k := \mathcal{A}|_{A_k}$ die Spur-σ-Algebra auf A_k. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ genau dann $(\mathcal{A},\, \mathcal{A}')$-messbar ist, wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f|_{A_k} : A_k \longrightarrow \Omega'$ jeweils $(\mathcal{A}_k,\, \mathcal{A}')$-messbar ist.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)
Seien $(\Omega,\, \mathcal{A})$ ein Messraum und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen $f_k : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{\, \omega \in \Omega \,:\, (f_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } \bar{\mathbb{R}} \,\} \subseteq \Omega$ messbar ist.

Hinweis: Sind $\liminf_{k\to\infty} f_k$ und $\limsup_{k\to\infty} f_k$ messbar?

Aufgabe 5.3 (2+2+1 Punkte)
Sei $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv. Zeigen Sie:

a) $T^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist Borel-messbar (d. h. $\mathcal{B}_n$-$\mathcal{B}_n$-messbar).

b) Für $\mu : \mathcal{B}_n \longrightarrow [0,\, \infty]$ mit $\mu(A) := \lambda_n(TA)$ für $A \in \mathcal{B}_n$ gilt $\mu = (\lambda_n|_{\mathcal{B}_n})^{T^{-1}}$.

c) Durch $A \mapsto \lambda_n(TA) : \mathcal{B}_n \longrightarrow [0,\, \infty]$ ist ein Maß auf $(\mathbb{R}^n,\, \mathcal{B}_n)$ gegeben.

Abgabe bis zum Dienstag, den 21. November 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Donnerstag, den 23. November 2023, um 16.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5M statt.