Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)
Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$, sodass $\mu((-\infty, x]) < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass durch $G(x) = \mu((-\infty, x])$ eine maßdefinierende Funktion $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist mit $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$.

Aufgabe 4.2 (2+2+2+2 Punkte)
Seien Ω und Ω' Mengen und $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$. Zeigen Sie:

a) Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ ist $f^{-1}(\mathcal{A}') = \{ f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}' \} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra.

b) Für jede σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist $\mathcal{A}_f = \{ A' \subseteq \Omega' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \} \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ eine σ-Algebra.

Beweisen oder widerlegen Sie:

c) Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ ist $\{ A \subseteq \Omega : f(A) \in \mathcal{A}' \} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra.

d) Für jede σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist $\{ f(A) : A \in \mathcal{A} \} \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ eine σ-Algebra.

Aufgabe 4.3 (2+2+2 Punkte)
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ Messräume. Seien $\mathcal{E}_j \subseteq \mathcal{P}(\Omega_j)$ mit $\sigma(\mathcal{E}_j) = \mathcal{A}_j$ für $j = 1, \ldots, n$ und

$$\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n = \Big\{ E_1 \times \cdots \times E_n : E_j \in \mathcal{E}_j \text{ für } j = 1, \ldots, n \Big\}.$$

Weiter existiere für jedes $j = 1, \ldots, n$ eine Folge $(E_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}_j$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_j^{(k)} = \Omega_j$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n \subseteq \sigma(\bigcup_{j=1}^n \pi_j^{-1}(\mathcal{E}_j))$.

b) $\bigcup_{j=1}^n \pi_j^{-1}(\mathcal{E}_j) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n)$.

c) $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n)$.

Hinweise: Für Teil a): Sind $E_j \in \mathcal{E}_j$ für $j = 1, \ldots, n$, so ist

$$\pi_j^{-1}(E_j) = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times E_j \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_n$$

und damit

$$\bigcap_{j=1}^n \pi_j^{-1}(E_j) = E_1 \times \cdots \times E_n,$$

Für Teil b) reicht es zu zeigen, dass $\pi_j^{-1}(\mathcal{E}_j) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n)$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Hierbei ist die Bedingung $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_j^{(k)} = \Omega_j$ hilfreich.

Für Teil c) denken Sie an Satz 4.9.

Vgl. Präsenzaufgabe 3. Warum ist dort eine Bedingung wie $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_j^{(k)} = \Omega_j$ nicht nötig?
Vgl. Präsenzaufgabe 4. Ist dort eine solche Bedingung erfüllt?

Abgabe bis zum Dienstag, den 14. November 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Donnerstag, den 16. November 2023, um 16.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5M statt.