

## Übungsblatt 3

### Aufgabe 3.1 (5 Punkte)

Seien  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum und  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Maßen auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  mit  $\mu_k(A) \leq \mu_{k+1}(A)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $A \in \mathcal{A}$ . Zeigen Sie, dass durch

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty], \quad \mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(A), \quad A \in \mathcal{A},$$

ein Maß auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  gegeben ist.

### Aufgabe 3.2 (4+2 Punkte)

Seien  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$  seine minimale Vervollständigung gemäß Satz 3.8. Weiterhin seien

$$\mathcal{B} = \left\{ B \subseteq \Omega \quad : \quad \exists E, F \in \mathcal{A} : E \subseteq B \subseteq F, \mu(F \setminus E) = 0 \right\}$$

sowie  $\nu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, \infty]$  gegeben durch  $\nu(B) = \sup \{ \mu(A) : A \in \mathcal{A}, A \subseteq B \}$  für  $B \in \mathcal{B}$ .

a) Zeigen Sie, dass  $\bar{\mathcal{A}}_\mu = \mathcal{B}$ .

b) Zeigen Sie, dass  $\bar{\mu} = \nu$ .

### Aufgabe 3.3 (3+4 Punkte)

Seien  $\Omega$  und  $\Omega'$  Mengen und  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$  Semi-Ringe. Seien weiterhin  $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, \infty]$  und  $\mu' : \mathcal{S}' \longrightarrow [0, \infty]$  endlich additiv mit  $\mu(\emptyset) = \mu'(\emptyset) = 0$ .

a) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}' = \{ A \times A' : A \in \mathcal{S}, A' \in \mathcal{S}' \} \subseteq \mathcal{P}(\Omega \times \Omega')$  ein Semi-Ring ist.

b) Zeigen Sie, dass durch  $(\mu \times \mu')(A \times A') = \mu(A) \cdot \mu'(A')$  für  $A \in \mathcal{S}$  und  $A' \in \mathcal{S}'$  eine endlich additive Mengenfunktion  $\mu \times \mu' : \mathcal{S} \times \mathcal{S}' \longrightarrow [0, \infty]$  gegeben ist mit  $(\mu \times \mu')(\emptyset) = 0$ .

*Hinweise:* Sie können für Teil b) die Präsenzaufgabe 1 verwenden.

Für die Definition von  $\mu \times \mu'$  sei  $0 \cdot \infty := 0$  und  $a \cdot \infty := \infty$  für  $0 < a \leq \infty$ .

Abgabe bis zum Dienstag, den 7. November 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.

Die Besprechung der Aufgaben findet am Donnerstag, den 9. November 2023, um 16.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5M statt.