Analysis III
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christiane Bui

Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1 (3+3 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_B := \{ A \cap B \,:\, A \in \mathcal{A} \}$ eine σ-Algebra über B ist.

b) Zeigen Sie, dass durch $\mu_B : \mathcal{A}_B \longrightarrow [0, \infty]$ mit $\mu_B(C) = \mu(C)$ für $C \in \mathcal{A}_B$ ein Maß auf $(B, \mathcal{A}_B)$ gegeben ist.

Aufgabe 2.2 (3+3 Punkte)
Seien Ω eine unendliche Menge, $\mathcal{A} = \{ A \subseteq \Omega \,:\, A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich} \} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ die Algebra der (co-) endlichen Mengen und $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ gegeben als $\mu(A) = 0$ für endliches $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(A) = 1$ sonst.

a) Zeigen Sie, dass μ eine (endlich) additive Mengenfunktion auf $\mathcal{A}$ mit $\mu(\varnothing) = 0$ ist.

b) Zeigen Sie, dass μ sich nicht zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortsetzen lässt, wenn Ω abzählbar ist.

Hinweis: Nach Präsenzaufgabe 1.2 ist $\mathcal{A}$ eine Algebra mit $\mathcal{A} \subsetneq \sigma(\mathcal{A})$.

Aufgabe 2.3 (5+1 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum.

a) Zeigen Sie, dass durch jede endliche, endlich additive und von oben stetige Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: In a) kann auf die Forderung der Endlichkeit von μ verzichtet werden.

Abgabe bis zum Dienstag, den 31. Oktober 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Donnerstag, den 2. November 2023, um 16.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5M statt.