

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1 (3+3 Punkte)

Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

- i) Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{E})$.
- ii) Geben Sie zwei σ -Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ an, für die $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ keine σ -Algebra ist.

Aufgabe 1.2 (3+3 Punkte)

Seien Ω eine Menge, $\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{E} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$.
Zeigen Sie:

- i) \mathcal{A} ist eine σ -Algebra.
- ii) $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$.

Aufgabe 1.3 (6 Punkte)

Sei $\mathcal{M}_4 := \{(x, y] : x, y \in \mathbb{Q}^n, x_j < y_j \text{ für } j = 1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{M}_4) = \mathcal{B}_n$.

Hinweis: Sie können verwenden, dass $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{M}_3)$; vgl. Lemma 2.12.

Bemerkung 2.2 (a) und Lemma 2.8 (5) können ebenfalls hilfreich sein.

Abgabe bis zum Dienstag, den 24. Oktober 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Donnerstag, den 26. Oktober 2023, um 16.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5M statt.