Analysis II
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christian Gesse

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Sommersemester 2023

Präsenzblatt 12

Präsenzaufgabe 12.1

Betrachten Sie die autonomen Systeme

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in J(x_0,\, y_0), \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

wobei $J(x_0,\, y_0)$ das Existenzintervall der maximalen Lösung zum Anfangswert $(x_0,\, y_0) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet und

$$(1) \quad f\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi^3 + \eta^3 \pm \xi \\ -\xi\eta^2 - 2\eta \end{pmatrix}, \quad (2) \quad f\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi^3 + \eta^3 \\ -\xi\eta^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Leiten Sie jeweils eine Linearisierung des Problems in der Form

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in J(x_0,\, y_0), \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

mit $A := Df(0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ her.

(ii) Entscheiden Sie weiterhin jeweils, ob das Prinzip der linearisierten Stabilität (Satz 7.7 und Bemerkung 7.8) für die stationäre Lösung $(x,\, y) \equiv 0$ angewendet werden kann. Machen Sie ggf. eine Aussage über die Stabilität dieser stationären Lösung.

(iii) Zeigen Sie, dass im Fall (2) durch

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad L(\xi,\, \eta) := \xi^2 + \eta^2, \qquad (\xi,\, \eta) \in \mathbb{R}^2,$$

eine Lyapunov-Funktion am Punkt $(0,\, 0)$ gegeben ist. Ist diese strikt?

Präsenzaufgabe 12.2

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Zu einem autonomen System existiert eine Lyapunov-Funktion.

(ii) Die Nulllösung von $y' = -y + y^3$ ist asymptotisch stabil.

(iii) Ein Strudelpunkt kann stabil oder instabil sein.

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am Mittwoch, den 28. Juni und Donnerstag, den 29. Juni 2023 bearbeitet.