Analysis II
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christian Gesse

Sommersemester 2023

Präsenzblatt 10

Präsenzaufgabe 10.1

Seien $\alpha, \kappa > 0$, $0 < x < \kappa$ und $u : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine Lösung der logistischen Wachstumsgleichung

$$u'(t) = \alpha u(t)(1 - \tfrac{u(t)}{\kappa}), \qquad (t \in \mathbb{R}), \quad u(0) = x.$$

Zeigen Sie, dass $v := \mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit $v(t) := \frac{1}{u(t)}$ für $t \in \mathbb{R}$ eine lineare Differentialgleichung löst. Bestimmen Sie diese Gleichung, bestimmen Sie v und damit auch u.

Präsenzaufgabe 10.2

Seien $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $x \in \mathbb{R}^2$ gegeben als

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems

$$u'(t) = Au(t) \qquad (t \in \mathbb{R}), \quad u(0) = x.$$

(ii) Bestimmen Sie die Lösung $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems

$$v'(t) = Av(t) + b(t) \qquad (t \in \mathbb{R}), \quad v(0) = x.$$

Präsenzaufgabe 10.3

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen sind immer lösbar.

b) e^A kann für nicht diagonalisierbare Matrizen A nicht definiert werden.

c) Ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes λ einer Matrix A echt kleiner als seine algebraische Vielfachheit, dann ist A nicht diagonalisierbar.

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am Mittwoch, den 14. Juni und Donnerstag, den 15. Juni 2023 bearbeitet.