Analysis II
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christian Gesse

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Sommersemester 2023

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1 (2+3+2+3+2+3+3 Punkte)

Betrachten Sie das autonome Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(u(t)), \qquad t^-(u_0) < t < t^+(u_0), \qquad u(0) = u_0, \tag{1}$$

auf dem Existenzintervall $(t^-(u_0),\, t^+(u_0))$ der maximalen Lösung, wobei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben ist als

$$f(z) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 - x^2 - y^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Zeigen Sie, dass das Problem die stationäre bzw. periodische Lösung

$$u_1,\, u_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad u_1 \equiv (0, 0)^T, \qquad u_2(t) = (\cos(t),\, \sin(t))^T, \qquad t \in \mathbb{R}$$

besitzt.

(ii) Leiten Sie eine Formulierung des Problems in der Form

$$v'(t) = A_1 v(t) + g_1(v(t)), \qquad t^-(v_0) < t < t^+(v_0), \qquad v(0) = v_0,$$

her, wobei $A_1 := Df(u_1) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(iii) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_1 und entscheiden Sie, ob das Prinzip der linearisierten Stabilität eine Aussage über die Stabilität von u_1 erlaubt. Machen Sie ggf. eine Aussage über die Stabilität von u_1.

(iv) Leiten Sie für $w(t) := u(t) - u_2(t)$ (mit u als Lösung von (1)) eine Formulierung des Problems in der Form

$$w'(t) = f_2(t,\, w(t)) = A_2 w(t) + g_2(t,\, w(t)), \qquad t^-(w_0) < t < t^+(w_0), \qquad w(0) = w_0, \tag{2}$$

her, wobei $A_2 := Df_2(0,\, 0)|_{t=0} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (beachten Sie: Df_2 umfasst hier nur die Ableitung in den beiden Ortskomponenten, nicht aber in t).

(v) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_2 und entscheiden Sie, ob Korollar 7.11 eine Aussage über die Stabilität von $w \equiv 0$ als stationäre Lösung des Systems (2) erlaubt. Machen Sie ggf. eine Aussage über die Stabilität von u_2 als periodische Lösung des Systems (1).

(vi) Zeigen Sie, dass die Formulierung des Problems (2) in Polarkoordinaten auf ein autonomes System

$$\begin{pmatrix} \rho'(t) \\ \phi'(t) \end{pmatrix} = h_2\begin{pmatrix} \rho(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \qquad t^-(\rho_0,\, \phi_0) < t < t^+(\rho_0,\, \phi_0), \qquad \begin{pmatrix} \rho(0) \\ \phi(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix},$$

mit $h_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\, \mathbb{R}^2)$ führt, wobei $h_2(0,\, 0) = (0,\, 0)^T$ ist.

(vii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$L_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad L_2(\rho) := \tfrac{1}{4}\rho^4 + \rho^3 + \rho^2, \qquad \rho \in \mathbb{R},$$

eine Lyapunov-Funktion zu dem autonomen Problem der ersten Zeile des autonomen Problems aus (vi) (nur die Gleichung für ρ) am Punkt $0 \in \mathbb{R}$ ist. Entscheiden Sie auf Basis dieser Lyapunov-Funktion, ob die periodische Lösung u_2 des ursprünglichen Anfangswertproblems stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist.

Hinweis: Die folgenden Aussagen können Sie ohne Beweis verwenden.

(1) Die Polarkoordinaten für ein allgemeines $z(t) = (x(t), (y(t))^T) \in \mathbb{R}^2$ *sind wie folgt definiert:*

$$z(t) = (x(t), y(t)) = r(t)(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t)))^T,$$

wobei $r : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *und* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Die Gleichung (1) lautet in Polarkoordinaten geschrieben wie folgt:*

$$r'(t) = (1 - r(t)^2)r(t),\ \varphi'(t) = 1.$$

Dann lautet die Darstellung für das verschobene Problem (2) wie folgt:

$$\rho(t) = r(t) - 1,\ \phi(t) = \varphi(t) - t.$$

(2) Das Prinzip der linearisierten Stabilität ist im Skript unter Korollar 7.11 zu finden. Es lässt sich eine analoge Aussage für Instabilität zeigen (vgl. Bemerkung 7.8).

Abgabe bis zum Dienstag, den 04. Juli 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 07. Juli 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5K statt.