

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1 (2+2+2 Punkte)

Beweisen Sie Satz 6.11 der Vorlesung:

- (i) Die exp-Reihe ist normkonvergent, d.h. es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{n!} < \infty$ und damit konvergent. Es gilt $\exp(0) = I_n$ ($n \times n$ -Einheitsmatrix) und $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.
- (ii) Für $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $AB = BA$ gilt $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.
- (iii) Durch $Z(t) := \exp(tA)$ ($t \in \mathbb{R}$) ist die eindeutige Lösung der Matrix-Dgl. $Z'(t) = AZ(t)$ mit $Z(0) = I_n$ gegeben. Eine Funktion $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ ist genau dann eine Lösung der Dgl. $y'(t) = Ay(t)$ ($t \in \mathbb{R}$), falls ein $c \in \mathbb{C}^n$ existiert mit $y(t) = \exp(tA)c$ ($t \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 10.2 (1+1+1+1+2 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(0) = y_0,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A .
- (ii) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A .
- (iii) Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.
- (iv) Bestimmen Sie e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$.
- (v) Bestimmen Sie mit Hilfe der Variation der Konstanten eine Lösung zu obigem Anfangswertproblem.

Aufgabe 10.3 (3+3 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad y(0) = y_0,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem $(z_1(t), z_2(t))$ der homogenen Gleichung.
- (ii) Bestimmen Sie eine Lösung zu obigem Anfangswertproblem.

Abgabe bis zum Dienstag, den 20. Juni 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 23. Juni 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium
in Hörsaal 5K statt.