Analysis II
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christian Gesse

Sommersemester 2023

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1 (6 Punkte)
Bestimmen Sie eine lokale Lösung u zum Anfangswertproblem

$$e^{-t} + 2u(t)u'(t) = 0 \quad (t \in I), \qquad u(0) = 1,$$

auf einem möglichst großen Existenzintervall $I \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 9.2 (6 Punkte)
Seien $J, J' \subset \mathbb{R}$ Intervalle, seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sei $f : J' \to \mathbb{R}$ stetig, sei $\tau \in J^\circ$ und sei $x \in R$, sodass $ax + b\tau + c \in J'$. Sei u eine lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(au(t) + bt + c) \quad (t \in J), \qquad u(\tau) = x,$$

auf dem Intervall J. Sei $v : J \to \mathbb{R}$ definiert durch $v(t) := au(t) + bt + c$ für $t \in J$.
Zeigen Sie, dass v eine lokale Lösung zu einem Anfangswertproblem auf dem Intervall J ist, das mit Hilfe von Trennung der Variablen gelöst werden kann.
Verwenden Sie diese Methode, um eine lokale Lösung u des Anfangswertproblems

$$u'(t) = (u(t) + t - 1)^2 \quad (t \in I), \qquad u(0) = 1$$

auf einem möglichst großen Existenzintervall $I \subset \mathbb{R}$ zu bestimmen.

Aufgabe 9.3 (6 Punkte)
Die Funktion $f : I \times \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung, wobei $I := [t_0, T) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sei. Seien $x, y : I \to \Omega$ differenzierbar mit

$$x(t_0) \leq y(t_0), \qquad x'(t) - f(t, x(t)) \leq y'(t) - f(t, y(t)) \quad (t \in [t_0, T)).$$

Zeigen Sie, dass dann schon $x(t) \leq y(t)$ für $t \in [t_0, T)$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie $g(t) := x(t) - y(t)$ und $h(t) := e^{-Lt}g(t)$, wobei L eine (lokale) Lipschitz-Konstante zu f sei.

Abgabe bis zum Dienstag, den 13. Juni 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 16. Juni 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5K statt.