Analysis II
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christian Gesse

Sommersemester 2023

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 (3+3 Punkte)
Seien $T > 0$, $I = [0, T]$ ein Intervall und $c, c_1, c_2 \geq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf (globale Version) die eindeutige Lösbarkeit folgender Anfangswertprobleme.

(a) $y'(t) = \frac{1}{1+t^2+y(t)^2} \quad (t \in I), \quad y(0) = c.$

(b) $y_1'(t) = y_1(t) - y_2(t), y_2'(t) = -y_2(t) + 2y_1(t) \quad (t \in I), \quad y_1(0) = c_1, y_2(0) = c_2.$

Aufgabe 8.2 (je 1,5 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichungen durch beliebige Punkte (x_0, y_0) des Definitionsbereichs:

(i) $y' = \sqrt{1-y^2}, \quad (|y| < 1).$

(ii) $y' = (a^2 + t^2)(b^2 + y^2), \quad (a, b > 0).$

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

(iii) $tyy' = -(t^2 + y^2), \quad y(-1) = \sqrt{15/2}.$

(iv) $v'(1 + t^2)\sin v - 2t \cos v = 0, \quad v(1) = \pi/3..$

Hinweis: Denken Sie an die Verfahren der Trennung der Variablen und der Substitution. Sie dürfen verwenden, dass $\cos(\pi/3) = 1/2$.

Aufgabe 8.3 (3+3 Punkte)

(i) Finden Sie ein Beispiel einer Differentialgleichung, sodass in Satz 4.18 für t^- und t^+ der Fall (2) eintritt.
Hinweis: Finden Sie zunächst eine Funktion y, für welche die entsprechenden Eigenschaften gelten, und finden Sie dazu eine Differentialgleichung $y' = f(y)$.

(ii) Beweisen Sie folgende Verallgemeinerung des Lemmas von Gronwall: Seien $J = [a, b]$ und $\varphi \in C(J, [0, \infty))$ und es gelte

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t h(s)\varphi(s)ds, \qquad (t \in J),$$

wobei $\alpha \geq 0$ und $h \in C(J, [0, \infty))$. Dann ist

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t h(s)ds\right).$$

Abgabe bis zum Dienstag, den 06. Juni 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 09. Juni 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5K statt.