Analysis II
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christian Gesse

Sommersemester 2023

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 (6 Punkte)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Weiter habe f in $x_0 \in U$ ein relatives Minimum. Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix von f in x_0, d.h. $H_f(x_0)$, positiv semi-definit ist.

Aufgabe 6.2 (3+3 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Extremwerte:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^4 - 2x^2 + 2x^2y^2 - y^2,$

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x + y^2) \exp(-(x^2 + y^2)).$

Aufgabe 6.3 (3+3 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 - xy + y^2 + x - y - 2.$$

(i) Bestimmen Sie die kritischen Stellen und die lokalen Extrema von f.

(ii) Betrachten Sie die Menge

$$Q = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \|(x, y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\} \leq 1 \,\}.$$

Bestimmen Sie Maximum und das Minimum von f auf Q.
Hinweis: Beachten Sie insbesondere den Rand ∂Q, welcher wie folgt parametrisiert werden kann:

$$\begin{aligned}\partial Q = &\{(t, -1) \,:\, -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(1, t) \,:\, -1 \leq t \leq 1\} \\ &\cup \{(t, 1) \,:\, -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(-1, t) \,:\, -1 \leq t \leq 1\}.\end{aligned}$$

Abgabe bis zum Dienstag, den 23. Mai 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 26. Mai 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5K statt.