Analysis II
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christian Gesse

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Sommersemester 2023

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 (2+3+1 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^{2k}+y^6} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass f für $k \in \mathbb{N}$ nicht stetig in $(0, 0)$ ist.

(ii) Entscheiden Sie, für welche $k \in \mathbb{N}$ die Funktion f im Punkt $(0, 0)$ in alle Richtungen $v = (v_1, v_2)$ mit $|v| = 1$ differenzierbar ist. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

(iii) Begründen Sie: Gilt die Umkehrung von Satz 2.28 aus dem Skript?

Aufgabe 5.2 (3+3 Punkte)
Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben als

(i) $f(x, y, z) = \cos(ye^x) + z^2$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

(ii) $g(x, y, z) = e^{x \sin(y)}$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen $\partial^\alpha f(x, y, z)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ mit $|\alpha| \leq 2$.

Aufgabe 5.3 (3+3 Punkte)
Berechnen Sie jeweils das Taylorpolynom $T_2(h, p) := \sum_{k=0}^{2} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(p) h^\alpha$ zweiten Grades am Entwicklungspunkt $p \in \mathbb{R}^3$:

(i) $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$ und $p = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$,

(ii) $f(x, y, z) = 1 + x + 2y - 4z$ und $p = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ sowie $p = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Abgabe bis zum Dienstag, den 16. Mai 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 19. Mai 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5K statt.