Analysis II
Prof. Dr. Jürgen Saal
Alexander Brück
Christian Gesse

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Sommersemester 2023

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1 (2+2 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit, Abgeschlossenheit, Beschränktheit und Kompaktheit:

(i) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < 1 + \sqrt{|x|}\}$.

(ii) $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x > y > z > 0\}$.

Aufgabe 3.2 (2+3+3 Punkte)
Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \sin x_1 + e^{x_2^2}, \qquad g(x) := x_1^2 + \cos x_2 \qquad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2).$$

Zeigen Sie:

(i) Die Abbildungen $\pi_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \pi_j(x) := x_j$ sind stetig ($j = 1, 2$).

(ii) f und g sind stetig in $\mathbb{R}^2$.

(iii) Die Menge $A := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \sin x_1 + e^{x_2^2} = 1, \ \ x_1^2 + \cos x_2 \leq 2 \right\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Ist A auch kompakt?

Aufgabe 3.3 (2+2+2 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

(i) f ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(ii) f ist partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.

(iii) f ist nicht differenzierbar in $(0,0)$.

Abgabe bis zum Dienstag, den 02. Mai 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 05. Mai 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5K statt.