

## Übungsblatt 1

### Aufgabe 1.1 (3+3 Punkte)

Seien  $a > 1$  und  $Z_n = \{1 = a^0, a^{1/n}, a^{2/n}, \dots, a^{n/n} = a\}$  eine Zerlegung des Intervalls  $[1, a]$

(a) Zeigen Sie, dass  $|I_j^n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) für jedes durch  $Z_n$  induzierte Teilintervall  $I_j^n = [a^{(j-1)/n}, a^{j/n}]$  und  $j = 1, \dots, n$ .

(b) Bestimmen Sie das Integral  $\int_1^a 1/x \, dx$  mit Hilfe der Ober- und Untersummen zu  $Z_n$ .

*Hinweis:* Zu (b):  $n(a^{1/n} - 1) \rightarrow \log(a)$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

### Aufgabe 1.2 (3+3 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$(a) \int e^x \sin(x) \, dx, \quad (b) \int \frac{2x}{\tan(x^2)} \, dx.$$

### Aufgabe 1.3 (3+3 Punkte)

(a) Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $\sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) = 0$  im Intervall  $(0, \pi)$  mindestens eine Lösung hat.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung:

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)^5}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \leq \operatorname{arsinh}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Abgabe bis zum Dienstag, den 18. April 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.

Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 21. April 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5K statt.