Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2021
08.07.2021
Blatt 11

ÜBUNGEN ZU MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER II

1. (Hier werden nur die Ergebnisse bewertet.) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$f_\alpha : (0,\infty)^n \to \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f_\alpha(x) := |x|^\alpha = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

Berechnen Sie

(a) alle ersten partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_j}(x)$,

(b) die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f_\alpha, x_j}(x)$,

(c) alle zweiten partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_i \partial x_j}(x)$.

2. (Hier werden auch die Rechnung und die Begründung bewertet.) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := |x|^2 e^{-|x|^2}.$$

Untersuchen Sie, ob f *isolierte* Extrema besitzt.

Bitte wenden!

3. (Hier wird auch die Rechnung bewertet.) Gegeben sei die Funktion

$$f : (0,\infty)^3 \to (0,\infty), \quad (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) := x^2y + y^2z + z^2x.$$

Berechnen Sie

(a) den Gradienten $\nabla f(x,y,z)$,

(b) die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(x,y,z)$ von f nach $\xi = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$, zunächst in einem beliebigen Punkt (x,y,z) und dann speziell in $(x_0,y_0,z_0) = (1,2,2)$,

(c) den Elastizitätgradienten $\vec{\varepsilon}_f(x,y,z)$ und

(d) die Richtungselastizität $\varepsilon_{f,\eta}(x,y,z)$ bezüglich der Richtung $\eta = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

4. (Hier wird auch die Rechnung korrigiert.) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass P genau eine kritische Stelle (x_0,y_0) besitzt, und bestimmen Sie diese.

(b) Untersuchen Sie anhand der Hesse-Matrix von P, ob in (x_0,y_0) ein lokales Extremum vorliegt und bestimmen Sie ggf. dessen Typ.

Abgabe: 20.07.2021, bis 14.20 Uhr
Besprechung: 20./21.07.2021