

# Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

## Vorlesungsprogramm für den 28. 06. 2007

(K. Steffen, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, SS 2007)

### 5.5 Extremstellen am Rand und bei Nebenbedingungen

Bisher haben wir uns nur mit Kriterien für innere Extremstellen einer Funktion  $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  befasst, aber schon darauf hingewiesen, dass es im Inneren nicht unbedingt Extremstellen geben muss und dass die Funktion ihre Exxtremwerte auch im Rand  $\partial D$  (oder gar nicht) annehmen kann. Wenn  $D$  der ganze Raum  $\mathbb{R}^n$  ist, so gibt es natürlich keine Randpunkte, aber  $\mathbb{R}^n$  als Optimierungsbereich ist bei ökonomischen Optimierungsproblemen unrealistisch. Dort hat man in der Praxis Kapazitätsbegrenzungen, welche die unabhängigen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  einschränken, und meisten sind die  $x_j$  auch nicht-negativ. Man hat dann also Laufbereiche  $0 \leq x_j \leq c_j$  für die Variablen  $x_j$  und der Optimierungsbereich ist ein Quader  $[0, c_1] \times \dots \times [0, c_n]$  in  $\mathbb{R}^n$ . Auch wenn der Optimierungsbereich  $D$  nicht diese besonders einfache Struktur hat, wird er jedenfalls bei praktischen Problemen beschränkt sein, also in einer großen Kugel liegen, und dann hat er auch unendlich viele Randpunkte (wenn  $n \geq 2$  und  $D \neq \emptyset$ ), die alle zu  $D$  gehören, wenn wir  $D$  abgeschlossen voraussetzen.

Diese Randpunkte kommen nun neben den inneren kritischen Punkten von  $f$  auch alle als Extremstellen in Frage, und da es unendlich viele sind, brauchen wir ein Verfahren, mit dem wir aus der Gesamtheit aller Randpunkte einige wenige "Kandidaten" auswählen, die allein Randextremstellen sein können. Ein solches Verfahren gibt es, wie wir sehen werden, wenn der Rand von  $D$  lokal durch eine Gleichung  $g(x) = c$  mit einer differenzierbaren reellen Funktion beschrieben werden kann wie z.B. die Gleichung  $x_j = c_j$ , wenn die Variable  $x_j$  eine Kapazitätsgrenze erreicht hat und damit  $x$  im Rand des Quaders  $D = [0, c_1] \times \dots \times [0, c_n]$  liegt, oder die Gleichung  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2$  wenn  $D = B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$  eine Kugel um den Ursprung vom Radius  $r > 0$  ist und  $x$  auf ihrem Rand liegt, also auf der Sphäre  $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ . Bevor wir dieses Verfahren besprechen, machen wir noch einige allgemeine Bemerkungen über Optimierungsbereiche, die durch Ungleichungen definiert sind, und die Beschreibung ihres Randes durch eine Gleichung.

#### BEMERKUNGEN (zur Beschreibung von Mengen durch (Un-)Gleichungen):

- Ein System von endlich vielen strengen Ungleichungen  $g_i(x) < c_i$  ( $i = 1 \dots m$ ) mit stetigen Funktionen  $g_i$  auf  $\mathbb{R}^n$  beschreibt eine offene Menge  $U$  in  $\mathbb{R}^n$ ;
- der Rand dieser Menge  $U$  besteht nur aus Punkten  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $g_i(x) \leq c_i$  für alle  $i$  und  $g_j(x) = c_j$  für mindestens ein  $j$ ;
- umgekehrt ist ein Punkt  $x$  mit  $g_j(x) = c_j$  und  $g_i(x) < c_i$  für alle  $i \neq j$  ein Randpunkt von  $U$ , sofern  $g_j$  kein lokales Minimum in  $x$  hat.

Insbesondere gilt:

- Wird  $U$  durch eine einzige Ungleichung  $g(x) < c$  mit stetiger Funktion  $g$  auf  $\mathbb{R}^n$  definiert und hat  $g$  keine lokale Minimumstelle mit Funktionswert  $c$ , so wird der Rand  $\partial U$  durch die Gleichung  $g(x) = c$  beschrieben.

Mit der durch das Ungleichungssystem beschriebene Menge  $U$  ist natürlich die Lösungsmenge  $U = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) < c_i \text{ für } i = 1 \dots m\}$  gemeint. Ist  $g_i(x) < c_i$ , so gibt es wegen der Stetigkeit von  $g_i$  eine Umgebung  $U_{\delta_i}(x)$ , auf der auch noch überall  $g_i < c_i$  ist. Ist  $x \in U$ , also  $g_i(x) < c_i$  für alle  $i$ , so wählen wir  $\delta > 0$  als das Minimum der Radien  $\delta_i$ , dann gilt  $g_i < c_i$  für alle  $i$  auf der Umgebung  $U_\delta(x)$ , d.h.  $U_\delta(x) \subset U$ . Daher besteht  $U$  aus lauter inneren Punkten, d.h.  $U$  ist offen. Dies beweist die erste Behauptung. (Alles bleibt gültig, wenn die  $g_i$  nur auf einem gemeinsamen offenen Definitionsbereich  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  definiert sind; dann ist  $\{x \in \mathcal{O} : g_i(x) < c_i \text{ für } i = 1 \dots m\}$  offen. Es sind natürlich auch Ungleichungen der Form  $g_i(x) > c_i$  zulassen; denn sie sind ja äquivalent zu  $-g_i(x) < -c_i$ . Ungleichungen  $g_i(x) \neq c_i$  kann man einbeziehen, indem man sie  $(g_i(x) - c_i)^2 > 0$  schreibt.)

Ist  $x$  ein Randpunkt von  $U$ , so gibt es beliebig nahe bei  $x$  Punkte  $\tilde{x} \in U$ , d.h. Punkte mit  $g_i(\tilde{x}) < c_i$  für alle  $i$ . Wegen der Stetigkeit von  $g_i$  unterscheidet sich daher  $g_i(x)$  beliebig wenig von einer Zahl  $< c_i$ , d.h. es muss  $g_i(x) \leq c_i$  gelten für alle  $i$ . Dabei kann nicht für alle  $i$  strenge Ungleichung bestehen, sonst läge  $x$  ja in  $U$  und wäre innerer Punkt, kein Randpunkt. Gilt umgekehrt  $g_j(x) = c_j$  und ist  $x$  keine lokale Minimumstelle von  $g_j$ , so gibt es beliebig nahe bei  $x$  Punkte  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  mit  $g_j(\tilde{x}) < c_j$ . Falls  $g_i(x) < c_i$  ist für alle  $i \neq j$  und  $\tilde{x}$  nahe genug bei  $x$  gewählt ist, so gilt wegen der Stetigkeit der  $g_i$  auch  $g_i(\tilde{x}) < c_i$  für alle  $i \neq j$ , dh.  $\tilde{x}$  gehört zu  $U$ . Somit liegt in jeder beliebig kleinen Umgebung von  $x$  ein Punkt aus  $U$ , aber auch ein Punkt aus  $\mathbb{R}^n \setminus U$ , nämlich  $x$  selbst (weil ja nicht  $g_j(x) < c_j$  gilt), d.h.  $x$  ist Randpunkt von  $U$  wie behauptet. Das Beispiel einer einzigen Ungleichung  $g(x) := x(x-1)^2 < 0$  auf  $\mathbb{R}$ , welche die Menge  $U = ]-\infty, 0[$  definiert, zeigt die Notwendigkeit, eine lokale Minimumstelle auszuschließen: Hier erfüllt  $x = 1$  die Gleichung  $g(x) = 0$ , ist aber kein Randpunkt von  $U$ .

Um den Satz über die Existenz von Maximum- und Minimestellen stetiger Funktionen anwenden zu können, brauchen wir *abgeschlossene* (und beschränkte) Optimierungsbereiche. Solche erhält man mit folgender Beobachtung:

- Ein System von beliebig vielen schwachen Ungleichungen  $g_i(x) \leq c_i$  mit stetigen Funktionen  $g_i$  auf  $\mathbb{R}^n$  beschreibt eine abgeschlossene Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}^n$ .

In der Tat: Das Komplement von  $A$  besteht aus den Punkten  $x \in \mathbb{R}^n$ , bei denen  $g_i(x) > c_i$  ist für mindestens ein  $i$ ; dann gilt aber wegen der Stetigkeit von  $g_i$  auch noch  $g_i > c_i$  auf einer ganzen Umgebung  $U_\delta(x)$ , also ist das Komplement von  $A$  offen und damit  $A$  abgeschlossen (siehe 5.1). (Auch wenn die  $g_i$  nicht auf  $\mathbb{R}^n$ , sondern nur auf einem gemeinsamen abgeschlossenen Definitionsbereich  $\subset \mathbb{R}^n$  definiert und stetig sind, ist die Lösungsmenge des Systems der schwachen Ungleichungen  $g_i(x) \leq c_i$  eine abgeschlossene Menge. Dabei kann man auch Gleichungen  $g_i(x) = c_i$  einbeziehen, indem man sie äquivalent als Kombination von zwei Ungleichungen  $g_i(x) \leq c_i$ ,  $-g_i(x) \leq -c_i$  formuliert.)

Ist eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  nicht abgeschlossen, so kann man sie "abschließen", indem man ihre Randpunkte hinzunimmt. Die Menge  $D \cup \partial D$  heißt der *Abschluss* von  $D$  und ist tatsächlich die kleinste abgeschlossene Obermenge zu  $D$  in  $\mathbb{R}^n$  (abgeschlossen, weil ihr Komplement, die Menge der äußeren Punkte von  $D$ , offen ist; die kleinste abgeschlossene Obermenge zu  $D$ , weil jede abgeschlossene Obermenge alle Randpunkte von  $D$  enthält). Der Rand  $\partial D$  selbst ist auch stets eine abgeschlossene Menge (sein Komplement besteht aus den inneren und den äußeren Punkten von  $D$  und ist offen). In Fällen, bei denen  $D$  durch endlich viele strenge Ungleichungen  $g_i(x) < c_i$  gegeben ist, wird der Abschluss oft (aber nicht immer) durch das entsprechende System der schwachen Ungleichungen  $g_i(x) \leq c_i$  beschrieben, und Randpunkte sind charakterisiert durch Eintreten der Gleichheit in mindestens einer der Ungleichungen. ■

**BEISPIELE:** (1) Im  $n$ -dimensionalen Zahlenraum sind die

und die

$$\begin{array}{ll} \text{offenen Kugeln} & U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\} \\ \text{abgeschlossenen Kugeln} & B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\} \end{array}$$

mit Mittelpunkt (Zentrum)  $a \in \mathbb{R}^n$  und Radius  $r > 0$  (im Fall  $n = 2$  auch *Kreisscheiben* genannt) tatsächlich offene Mengen bzw. abgeschlossene Mengen; denn  $U_r(a)$  wird durch die strenge Ungleichung  $g(x) < r^2$  mit der stetigen Funktion  $g(x) = (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2$  beschrieben und  $B_r(a)$  durch die schwache Ungleichung  $g(x) \leq r^2$ . Da der Abstand zu  $a$  und damit auch  $g$  kein positives lokales Extremum auf  $\mathbb{R}^n$  hat, beschreibt die Gleichung  $g(x) = r^2$  den Rand von  $U_r(a)$  und auch den Rand des Komplements  $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > r^2\}$  von  $B_r(a)$ , also auch den Rand von  $B_r(a)$ . Dieser gemeinsame Rand von  $U_r(a)$  und  $B_r(a)$  heißt die

$$\text{Sphäre } S_r(a) := \partial U_r(a) = \partial B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$$

mit Zentrum  $a$  und Radius  $r$  (im Fall  $n = 2$  auch *Kreislinie* genannt). Da man die abgeschlossene Kugel  $B_r(a)$  erhält, indem man zur offenen Kugel  $U_r(a)$  alle Randpunkte, also die Punkte mit Abstand  $r$  zum Zentrum  $a$ , hinzunimmt, ist  $B_r(a)$  auch der Abschluss der offenen Kugel  $U_r(a)$ .

(2) Häufig vorkommende Definitionsbereiche für ökonomische Funktionen sind die Mengen

$$\mathbb{R}_{>0}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j > 0 \text{ für } j = 1 \dots n\}, \quad \mathbb{R}_{\geq 0}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0 \text{ für } j = 1 \dots n\}$$

der (komponentenweise) positiven bzw. nichtnegativen Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  (auch positiver bzw. nichtnegativer *Quadrant* genannt im Fall  $n = 2$  und *Oktant* im Fall  $n = 3$ ). Der Bereich  $\mathbb{R}_{>0}^n$  ist offen, weil er durch die strengen Ungleichungen  $x_j > 0$  für  $j = 1 \dots n$  beschrieben wird, und  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  ist abgeschlossen, da beschrieben durch die schwachen Ungleichungen  $x_j \geq 0$ . Für Randpunkte muss in mindestens einer der Ungleichungen Gleichheit eintreten. Gilt andererseits  $x_i \geq 0$  für alle  $i$  und dabei  $x_j > 0$  für mindestens einen Index  $j$  so liegen beliebig nahe bei  $x$  einerseits innere Punkte  $(x_1 + t, \dots, x_n + t)$  von  $\mathbb{R}_{>0}^n$ , andererseits auch äußere Punkte  $x - te_j$  von  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  ( $0 < t \ll 1$ ). Daher haben  $\mathbb{R}_{>0}^n$  und  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  denselben Rand, und dieser Rand besteht aus allen Punkten  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ , bei denen mindestens eine Komponente  $x_j = 0$  ist. Da man  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  erhält, indem man zu  $\mathbb{R}_{>0}^n$  alle diese Randpunkte hinzunimmt, ist  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  der Abschluss von  $\mathbb{R}_{>0}^n$ .

(3) Bei Kapazitätsgrenzen  $x_j \leq c_j$  ( $c_j > 0$ ) für nichtnegative Variable hat man typischerweise einen

$$\text{abgeschlossenen Quader} \quad [0, c_1] \times \dots \times [0, c_n] \subset \mathbb{R}^n$$

als Definitionsbereich. Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , da sie durch schwache Ungleichungen  $x_j \geq 0$  und  $x_j \leq c_j$  ( $j = 0 \dots n$ ) beschrieben wird. Sein Inneres, der *offene Quader*  $]0, c_1[ \times \dots \times ]0, c_n[$  wird durch die entsprechenden strengen Ungleichungen definiert. Der Rand des offenen und des abgeschlossenen Quaders besteht auch hier aus allen Punkten  $x$  des abgeschlossenen Quaders, in denen mindestens bei einer Ungleichung Gleichheit eintritt, d.h. es gilt  $x_j = 0$  oder  $x_j = c_j$  für mindestens ein  $j$ . (Dass dies in allen Randpunkten so sein muss, ergibt sich aus den vorangehenden Bemerkungen; dass umgekehrt alle Punkte  $x$  mit dieser Eigenschaft Randpunkte sind, sieht man, indem man ähnlich wie in (2) überlegt, dass in beliebiger Nähe von  $x$  sowohl Punkte des offenen Quaders als auch äußere Punkte des abgeschlossenen Quaders liegen.) Wie in den beiden vorangehenden Beispielen ist ist folglich auch hier der abgeschlossene Quader gleich dem Abschluss des offenen. ■

Wenn der Optimierungsbereich durch eine Ungleichung  $g(x) \leq c$  und sein Rand durch die Gleichung  $g(x) = c$  mit einer differenzierbaren Funktion  $g$  beschrieben ist, so können wir nun folgendes Kriterium für Randextremstellen der zu optimierenden Funktion formulieren:

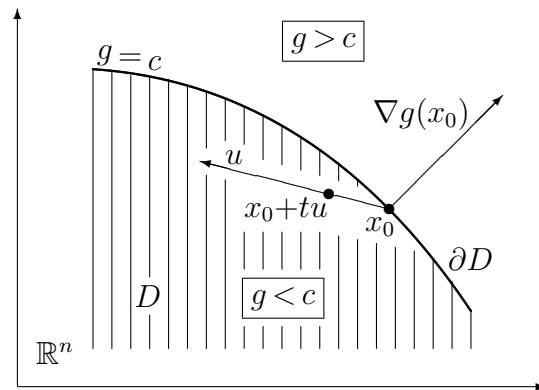
**SATZ (notwendiges Kriterium für Randextremstellen):** Hat  $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  eine lokale Extremstelle in einem zu  $D$  gehörenden Randpunkt  $x_0$  von  $D$  und ist der Rand  $\partial D$  in einer Umgebung von  $x_0$  durch eine Gleichung  $g(x) = c$  beschrieben, derart dass Punkte mit  $g(x) < c$  im Inneren von  $D$  liegen, so sind

$$\nabla f(x_0), \nabla g(x_0) \text{ linear abhängig,}$$

vorausgesetzt  $f$  und  $g$  haben stetige partielle Ableitungen in  $x_0$ . Falls  $\nabla g(x_0) \neq 0$  ist, so gibt es also ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  (der sog. **Lagrange-Multiplikator**) mit

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0).$$

Weil man daraus noch zusätzliche Informationen gewinnen kann, geben wir den *Beweis* dieses Kriteriums: Im Fall  $\nabla g(x_0) = 0$  ist nichts zu zeigen, also nehmen wir  $\nabla g(x_0) \neq 0$  an. Wir betrachten nun Richtungen  $u \in \mathbb{R}^n$  mit  $u \cdot \nabla g(x_0) < 0$  (geometrisch gesprochen sind das Richtungen mit einem Winkel größer als  $90^\circ$  zu  $\nabla g(x_0)$ ). Für solche Richtungen ist  $\frac{d}{dt}|_{t=0} g(x_0 + tu) = \partial_u g(x_0) = u \cdot \nabla g(x_0) < 0$ , also gilt  $g(x_0 + tu) < g(x_0) = c$  für kleine  $t > 0$ , d.h. die Richtung  $u$  führt von  $x_0$  aus ins Innere von  $D$ . Hat nun z.B.  $f$  eine lokale Maximumstelle in  $x_0$  bzgl. des Bereichs  $D$ , so folgt  $f(x_0 + tu) \leq f(x_0)$  für  $0 < t \ll 1$  und damit  $0 \geq \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x_0 + tu) = \partial_u f(x_0) = u \cdot \nabla f(x_0)$ . Somit gilt  $u \cdot \nabla f(x_0) \leq 0$  für alle  $u \in \mathbb{R}^n$  mit  $u \cdot \nabla g(x_0) < 0$ . Insbesondere



können wir hier  $u = -\varepsilon \nabla g(x_0) + v$  wählen mit  $\varepsilon > 0$  und  $v \cdot \nabla g(x_0) = 0$ ; dann folgt  $0 \geq -\varepsilon \nabla g(x_0) \cdot \nabla f(x_0) + v \cdot \nabla f(x_0)$ . Da  $\varepsilon > 0$  hier beliebig ist und statt  $v$  auch  $-v$  eingesetzt werden kann, muss sogar  $v \cdot \nabla f(x_0) = 0$  sein für alle  $v \perp \nabla g(x_0)$ . Das bedeutet aber (siehe 3.5)  $\nabla f(x_0) \in (\mathbb{R} \nabla g(x_0))^{\perp\perp} = \mathbb{R} \nabla g(x_0)$ , also lineare Abhängigkeit von  $\nabla f(x_0)$  und  $\nabla g(x_0)$ .

**DISKUSSION:** 1) Den Beweis kann man geometrisch so verstehen: Der Gradient  $\nabla g(x_0)$  steht senkrecht auf dem Rand  $\partial D$ , weil der Rand ja als Niveaumenge  $g(x) = c$  von  $g$  dargestellt ist. Wäre nun  $\nabla f(x_0)$  nicht gleichfalls orthogonal zum Rand  $\partial D$  in  $x_0$ , so könnte man Richtungen  $u, v$  finden, die von  $x_0$  aus ins Innere von  $D$  führen, derart dass  $f(x_0 + tu)$  fallend und  $f(x_0 + tv)$  wachsend von  $t$  abhängt für kleine  $t > 0$ , also könnte dann in  $x_0$  keine lokale Extremstelle von  $f$  bzgl.  $D$  vorliegen. Daher gilt:

- In einer Randextremstelle von  $f$  ist der Gradient von  $f$  orthogonal zum Rand  $\partial D$

und mithin ein Vielfaches des Gradienten  $\nabla g(x_0)$  (wenn  $\nabla g(x_0) \neq 0$ ).

2) Über das **Vorzeichen des Lagrange–Multiplikators**  $\lambda$  kann man aus dem Beweis noch Folgendes entnehmen, wenn  $g < c$  ist im Inneren von  $D$  und  $g = c$  auf dem Rand, wie wir es in dem obigen Satz angenommen haben, so dass also der Gradient  $\nabla g(x_0)$  ins Äußere von  $D$  zeigt: Hat  $f$  eine lokale Randmaximumstelle in  $x_0$  so zeigt auch  $\nabla f(x_0)$  nach außen oder verschwindet, also ist  $\lambda \geq 0$ ; hat aber  $f$  eine lokale Randminimumstelle in  $x_0$ , so zeigt  $\nabla f(x_0)$  nach innen oder verschwindet, also ist dann  $\lambda \leq 0$ .

3) **Bestimmung der Randextremstellen:** Ist der ganze Rand  $\partial D$  durch eine Gleichung  $g(x) = c$  mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $g$  auf  $\mathbb{R}^n$  beschrieben und etwa  $g < c$  im Inneren und  $g > c$  im Äußeren von  $D$ , so erhält man eine **vollständige Liste von Randkandidaten** für lokale Extremstellen der stetig differenzierbaren Funktion  $f$  auf  $D$ , indem man alle Punkte  $x$  bestimmt mit  $g(x) = c$  und  $\nabla f(x), \nabla g(x)$  linear abhängig. Dazu gehören insbesondere die Stellen  $x$  im Rand mit  $\nabla g(x) = 0$ , aber bei guter Wahl der Funktion  $g$ , die den Rand beschreibt, gibt es solche Gradientennullstellen oft gar nicht. Die Randkandidaten  $x$  mit  $\nabla g(x) \neq 0$  findet man durch Lösen des folgenden Systems von  $n+1$  (im Allgemeinen nichtlinearen) Gleichungen für  $n+1$  Unbekannte  $x_1, \dots, x_n, \lambda$ :

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &= c \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Hierbei interessiert der Lagrange–Multiplikator  $\lambda$  eigentlich gar nicht, sondern nur die Komponenten  $x_1, \dots, x_n$  der Lösungen, welche die Randkandidaten  $x = (x_1, \dots, x_n)$  liefern. Daher wird man meistens versuchen, zuerst  $\lambda$  aus dem Gleichungssystem zu eliminieren.

4) Ist eine Beschreibung des Randes  $\partial D$  durch eine Gleichung  $g(x) = c$  mit einer stetig differenzierbaren Funktion nur für ein relativ offenes Teilstück  $U \cap \partial D$  gegeben, d.h.  $U$  ist offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $U \cap \partial D = \{x \in U : g(x) = c\}$  sowie  $g > 0$  in äußeren Punkten von  $D$ , die nahe bei einem Punkt aus  $U \cap \partial D$  liegen, so gibt die Vorgehensweise in 3) eine vollständige Liste von Randkandidaten in diesem Teilstück  $U \cap \partial D$  des Randes. Setzt sich der Rand zusammen aus mehreren derartigen Teilstücken, so erhält man eine **zusammengesetzte vollständige Liste der Randkandidaten** folgendermaßen:

- Die vollständige Liste der Randkandidaten für Extremstellen setzt sich zusammen aus den vollständigen Kandidatenlisten für die Teilstücke des Randes, in denen man das Kriterium für Randextremstellen anwenden kann,
- und aus den dabei evtl. nicht erfassten “Ausnahmerandpunkten”, wie z.B. Ecken des Optimierungsbereiches  $D$  oder Nichtdifferenzierbarkeitsstellen der zu optimierenden Funktion  $f$  oder der den Rand beschreibenden Funktion  $g$ .

Solche Ausnahmepunkte kommen nämlich natürlich auch als Randextremstellen in Betracht, solange man sie nicht mit eigens darauf zugeschnittenen Überlegungen als Kandidaten ausschließen kann! ■

Ein anderes und insbesondere bei kleinen Dimensionen manchmal einfacheres Verfahren, die Randextremstellen zu bestimmen, beruht auf der sog. **Methode der Randparametrisierung**. Dabei stellt man den Rand  $\partial D$  des Optimierungsbereiches  $D \subset \mathbb{R}^n$  — oder einen Teil des Randes — als Bild einer differenzierbaren Abbildung  $h: \mathbb{R}^m \supset P \ni \xi \mapsto h(\xi) \in \partial D \subset \mathbb{R}^n$  dar mit einem Parameterbereich  $P \subset \mathbb{R}^m$ . (Normalerweise ist der Rand eines Bereiches  $D$  im  $n$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^n$  eine Menge der Dimension  $n-1$ , also wird man den Parameterbereich  $P$  im Allgemeinen in  $\mathbb{R}^{n-1}$  wählen.) Ist nun  $x_0 = h(\xi_0)$  eine lokale Randextremstelle von  $f$  und  $\xi_0$  eine innere Stelle von  $P$ , so hat die Verkettung  $f \circ h$  eine innere lokale Extremstelle an der Stelle  $\xi_0$  (das folgt aus der Stetigkeit von  $h$  an der Stelle  $\xi_0$ ), also gibt das notwendige Kriterium für innere Extremstellen  $\frac{\partial(f \circ h)}{\partial \xi_k}(\xi_0) = 0$  für  $k = 1 \dots m$ , sofern  $f$  an der Stelle  $x_0$  und damit  $f \circ h$  an der Stelle  $\xi_0$  differenzierbar ist. Damit haben wir folgenden

**SATZ (notwendiges Kriterium für Randextrema bei Randparametrisierung):**  
*Hat  $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  eine lokale Extremstelle im Randpunkt  $x_0$  von  $D$  und ist dort differenzierbar, so gilt für jede differenzierbare Randparametrisierung  $h: \mathbb{R}^m \supset P \rightarrow \partial D \subset \mathbb{R}^n$  mit  $h(\xi_0) = x_0$  für eine innere Stelle  $\xi_0$  des Parameterbereichs  $P$ :*

$$\frac{\partial(f \circ h)}{\partial \xi_k}(\xi_0) = 0 \quad \text{für } k = 1 \dots m.$$

**DISKUSSION:** Ist der Parameterbereich  $P$  offen in  $\mathbb{R}^m$  und  $f$  überall differenzierbar auf  $h(P)$ , so findet man eine **vollständige Liste von Randkandidaten im parametrisierten Randbereich**  $h(P) \subset \partial D$ , durch Lösung von  $m$  Gleichungen (meistens wird  $m = n-1$  sein, wie gesagt)

$$\frac{\partial(f \circ h)}{\partial \xi_k}(\xi_1, \dots, \xi_m) = 0 \quad (k = 1 \dots m) \quad \text{für } (\xi_1, \dots, \xi_m) \in P \subset \mathbb{R}^m$$

und Einsetzen der Lösungen  $\xi \in P$  in die Parametrisierung  $h$ . Im Übrigen gilt das in der vorangegangenen Diskussion unter Punkt 4) Gesagte analog: Eine vollständige Liste von Randkandidaten findet man, indem man für jeden so parametrisierten Teil von  $\partial D$  die Kandidatenliste erstellt und dann noch eventuelle Ausnahmepunkte hinzunimmt, die nicht in einem der parametrisierten Teilstücke liegen, oder in denen die Voraussetzungen des obigen Satzes nicht erfüllt sind. Verschiedene Verfahren zur Aufstellung von Kandidatenlisten für Extremstellen können übrigens durchaus zu unterschiedlichen Listen führen, aber alle derartigen Listen enthalten, wenn sie wirklich vollständig sind, die gesuchten Extremstellen — wenn es welche gibt. ■

**BEISPIELE (Extremstellenbestimmung unter Einschluss von Randextrema):**

(1) Wir betrachten eine nichtkonstante *lineare Funktion*  $f(x, y) = a_1x + a_2y + a_0$  auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe  $D = B_r(b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 \leq r^2\}$  mit Zentrum  $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$  und Radius  $r > 0$ . Hier hat  $\nabla f(x, y) = (a_1, a_2)$  keine Nullstelle in  $\mathbb{R}^2$  also gibt es keine inneren Extremstellen (auf keinem Optimierungsbereich in  $\mathbb{R}^2$ ). Der Rand von  $D$  ist die Kreislinie  $S_r(b)$  und wird beschrieben durch die Gleichung  $g(x, y) = (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 = r^2$  mit  $g < r^2$  im Inneren von  $D$ . Es gilt  $\nabla g(x, y) = 2(x-b_1, y-b_2) \neq (0, 0)$  für  $(x, y) \in S_r(b)$ .

Also lautet die notwendige Bedingung für Randextremstellen  $(x, y)$  hier:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} x - b_1 \\ y - b_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 = r^2,$$

was genau die folgenden zwei Lösungen hat (mit passendem  $\lambda \in \mathbb{R}$ ):

$$(x_*, y_*) = (b_1, b_2) - \frac{r}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}(a_1, a_2), \quad (x^*, y^*) = (b_1, b_2) + \frac{r}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}(a_1, a_2).$$

Diese beiden Stellen, die auf der Kreislinie  $\partial D = S_r(\mathbf{b})$  vom Mittelpunkt  $\mathbf{b}$  aus gesehen in Richtung des Koeffizientenvektors  $\pm(a_1, a_2)$  von  $f$  liegen, sind somit die einzigen Kandidaten für Extremstellen der linearen Funktion  $f$  auf  $D$ . Da  $D$  kompakt ist (abgeschlossen und beschränkt), weshalb der Extremstellensatz aus 5.4 die Existenz von Minimumstellen und Maximumstellen zu  $f$  auf  $D$  garantiert, und da  $f(x_*, y_*) < f(x^*, y^*)$  ist, muss folglich  $(x_*, y_*)$  die eindeutige Minimumstelle und  $(x^*, y^*)$  die eindeutige Maximumstelle zu  $f$  auf  $D$  sein.

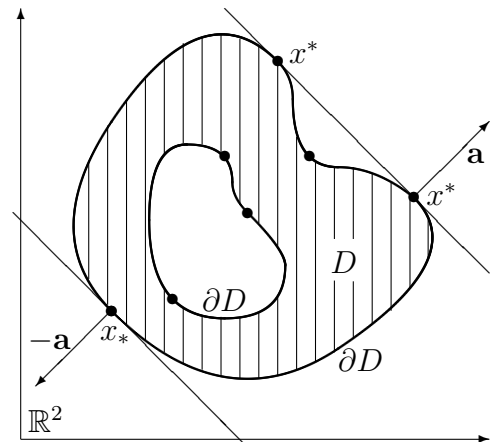
Alles geht ganz analog in höheren Dimensionen für die Extremstellenbestimmung von linearen Funktionen  $f(x) = \mathbf{a} \cdot x + a_0$  auf abgeschlossenen Kugeln  $B_r(\mathbf{b})$  in  $\mathbb{R}^n$ . Die eindeutigen Minimum- und Maximumstellen liegen im Rand und sind gegeben durch  $x_* = \mathbf{b} - \frac{r}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$ ,  $x^* = \mathbf{b} + \frac{r}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$ .

(2) Bleiben wir noch bei linearen Funktionen  $f(x) = \mathbf{a} \cdot x + a_0$  auf  $\mathbb{R}^n$ , ziehen aber allgemeine abgeschlossene Optimierungsbereiche  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq c\}$  mit Rand  $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\}$  in Betracht. Wegen  $\nabla f(x) = \mathbf{a}$  lautet hier die notwendige Bedingung für Randextremstellen in Randpunkten  $x$  mit  $\nabla g(x) \neq 0$ :

$$\mathbf{a} = \lambda \nabla g(x), \quad g(x) = c.$$

Da  $\nabla g(x)$  in alle Randpunkten orthogonal zum Rand  $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\}$  ist, bedeutet diese Bedingung anschaulich, dass die Randkandidaten für Extremstellen genau die Randpunkte sind, in denen der Koeffizientenvektor  $\mathbf{a}$  orthogonal zum Rand ist. Wenn der Bereich  $D$  auch beschränkt ist, also auch kompakt (sowieso abgeschlossen, weil durch eine schwache Ungleichung definiert), so existiert mindestens eine Minimum- und eine Maximumstelle von  $f$  auf  $D$  und diese Stellen müssen im Rand liegen (da  $\nabla f \equiv \mathbf{a}$  keine Nullstelle hat). Also gibt es mindestens zwei Stellen im Rand, in denen der Vektor  $\mathbf{a}$  orthogonal zum Rand ist. Anschaulich findet man sie, indem man eine zu  $\mathbf{a}$  orthogonale Hyperebene (Gerade, wenn  $n = 2$ ; Ebene, wenn  $n = 3$ ) parallel in Richtung  $\mathbf{a}$  verschiebt, bis sie den Bereich  $D$  zum ersten Mal trifft (die Berührungspunkte sind dann die Minimumstellen  $x_*$ ) bzw. zum letzten Mal (die Berührungspunkte sind die Maximumstellen  $x^*$ ). Dieses **graphische Verfahren zur Extremstellenbestimmung bei linearen Funktionen**

liefert auf jedem kompakten Bereich  $D \subset \mathbb{R}^2$  die Maximum- und Minimumstellen. Außer den Extremstellen kann es — wie die markierten Randpunkte in der Abbildung — durchaus noch weitere Punkte im Rand  $\partial D$  geben, in denen der Rand orthogonal zum gegebenen Vektor  $\mathbf{a}$  verläuft. Diese Stellen erscheinen dann in jeder vollständigen Kandidatenliste, die mit den notwendigen Bedingung für Randextremstellen erstellt wurde, es sind aber keine Extremstellen, sondern evtl. nur lokale Extremstellen oder nicht einmal das.



**(3)** Wenn der Optimierungsbereich  $D \subset \mathbb{R}^n$  nicht kompakt ist, so braucht eine lineare Funktion  $f(x) = \mathbf{a} \cdot x + a_0$  kein Minimum oder Maximum auf  $D$  anzunehmen. Falls  $D$  nicht abgeschlossen ist, also einen seiner Randpunkte nicht enthält, so kann es passieren, dass  $f$  sein Infimum bzw. Supremum auf  $D$  nur in diesem Randpunkt annimmt, der nicht zu  $D$  gehört. Im Extremfall, wenn  $D$  offen ist, also keinen seiner Randpunkte enthält, ist das immer der Fall (außer  $f$  ist konstant), weil lineare Funktionen ja niemals innere Extremstellen haben. Ist  $D$  abgeschlossen, aber unbeschränkt, so kann es passieren, dass die Minimalfolgen bzw. Maximalfolgen in  $D$ , auf denen  $f$  gegen sein Infimum bzw. Supremum auf  $D$  strebt, allesamt gegen Unendlich laufen, und in diesem Fall gibt es wieder keine Extremstellen von  $f$  in  $D$ .

Betrachten wir konkret etwa  $f(x, y) = y - x$  auf dem über der Normalparabel gelegenen Bereich  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ , der beschrieben wird durch  $g(x, y) = x^2 - y \leq 0$  und die Normalparabel mit der Gleichung  $g(x, y) = 0$  als Rand hat. Die notwendige Bedingung für Randkandidaten ist hier

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x^2 - y = 0$$

und hat nur eine Lösung  $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$  (und  $\lambda = -1$ ). Also nimmt  $f$  auf  $D$  sicher nicht Maximum *und* Minimum an, sondern nur eins von beiden. Aus  $f(0, y) = y$  erkennt man, dass  $f$  beliebig große Werte auf  $D$  annimmt, also sicher kein Maximum hat. Damit kann man aber noch nicht schließen, dass der einzige gefundene Extremstellen-Kandidat  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  eine absolute Minimumstelle ist — es könnte sich auch um eine nur lokale Extremstelle handeln oder einen Randsattelpunkt. Aber aus  $f(x, y) = y - x \geq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x^2 - x$  für  $(x, y) \in D$  erkennt man, dass Minimalfolgen in  $D$  nicht gegen Unendlich laufen können. Nach dem Zusatz zum Extremstellensatz in 5.4 nimmt also  $f$  ein Minimum auf  $D$  an, und das kann nur an der Stelle  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  sein.

Bei dem hyperbolischen Bereich  $\tilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq -1\}$  lautet die notwendige Bedingung für Randextrema von  $f(x, y) = y - x$  dagegen

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}, \quad x^2 - y^2 = -1$$

und hat überhaupt keine Lösungen (weil die erste Gleichung nur mit  $x = y$  erfüllbar ist). Folglich gibt es auf  $\tilde{D}$  überhaupt keine lokalen Extremstellen von  $f$ , weil es eben überhaupt keine Kandidaten gibt. (Das kann man natürlich von vorneherein daran sehen, dass  $(0, y) \in \tilde{D}$  ist für  $|y| \geq 1$  und dass  $f(0, y) = y$  positive und negative Werte von beliebig großem Betrag annimmt. Aber die Argumentation hier zeigt mehr, nämlich z.B. dass  $f$  auch keine lokalen Extremstellen auf  $D$  hat.)

Es ist ganz instruktiv, hier auch einmal die Randparametrisierungsmethode zur Aufstellung einer vollständigen Randkandidatenliste anzuwenden. (Bei ebenen Gebieten, deren Ränder durch eine oder endlich viele *Kurven* parametrisiert werden können, klappt das meistens gut.) Bei dem parabolischen Bereich  $D$  ist  $h(x) = (x, x^2)$  eine naheliegende Randparametrisierung. Es gilt  $f \circ h(x) = x^2 - x$  und  $\frac{d}{dx} f(h(x)) = 2x - 1 = 0$  nur für  $x = \frac{1}{2}$ . Die Randparametrisierungsmethode liefert für  $D$  also ebenfalls den einzigen Randkandidaten  $h(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ . Beim hyperbolischen Bereich  $\tilde{D}$  haben wir zwei Randkurven, parametrisiert z.B. durch  $h(x) = (x, \pm\sqrt{1+x^2})$ . Hier ist  $f(h(x)) = \pm\sqrt{1+x^2} - x$  mit Ableitung  $\pm x/\sqrt{1+x^2} - 1$  ohne jede Nullstelle auf  $\mathbb{R}$ , also zeigt hier auch die Randparametrisierungsmethode, dass die Kandidatenliste leer ist.



(4) Wir betrachten nun eine nichtkonstante *lineare Funktion*  $f(x, y) = a_1x + a_2y + a_0$  auf dem Quadrat  $Q = [0, 1]^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . Innere kritische Punkte gibt es nicht. Der Rand von  $Q$  enthält vier relativ offene Strecken, die durch Gleichungen  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  bzw.  $y = 1$  beschrieben werden (wobei die jeweils andere Variable in  $]0, 1[$  variiert). Die Gradienten der Funktion  $g(x, y)$  auf der linken Seite dieser Gleichungen sind die kanonischen Basisvektoren  $(1, 0)$  bei den beiden ersten Strecken (parallel zur vertikalen Achse) und  $(0, 1)$  bei den beiden anderen (parallel zur horizontalen Achse). Im Fall  $a_1 \neq 0$  und  $a_2 \neq 0$  ist  $\nabla f(x, y) = (a_1, a_2)$  also nirgends linear abhängig von  $\nabla g(x, y)$ , d.h. es gibt keine Randkandidaten in den vier Randstrecken.

Heißt dies, dass es überhaupt keine Kandidaten für Extremstellen von  $f$  auf  $Q$  gibt, weder im Inneren noch am Rand? Das kann nicht sein; denn  $Q$  ist ja kompakt, also garantiert der Extremstellensatz, dass es mindestens eine Minimumstelle und mindestens eine Maximumstelle gibt! Der scheinbare Widerspruch wird aufgelöst durch die Feststellung, dass wir mit der notwendigen Bedingung für Randextremstellen nicht *alle* Randpunkte von  $Q$  erfassen können, sondern nur die auf den relativ offenen Randstrecken gelegenen, also nicht die Eckpunkte. Bei einem Eckpunkt haben wir keine differenzierbare Beschreibung des Randes durch eine Gleichung  $g = c$  (und wenn wir eine artifizielle angeben würden, so müsste  $\nabla g = 0$  in der Ecke sein), also können wir diese Punkte nicht als Extremstellen ausschließen. Die vollständige Kandidatenliste besteht somit im Fall  $a_1 \neq 0$ ,  $a_2 \neq 0$  genau aus den vier Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  und  $(1, 1)$ , und ein Wertevergleich zeigt, dass genau in einer Ecke das Minimum und in der gegenüber liegenden das Maximum angenommen wird.

Im Fall  $a_1 = 0$  bzw.  $a_2 = 0$  sind alle Randpunkte mit  $y = 0$  oder  $y = 1$  bzw. alle Randpunkte mit  $x = 0$  oder  $x = 1$  Randkandidaten, die Menge der Minimumstellen bzw. Maximumstellen besteht aus zwei gegenüberliegenden abgeschlossenen Seiten von  $Q$ . Das in (2) beschriebene graphische Verfahren zur Extremstellenbestimmung bei linearen Funktionen macht dies klarer: Wenn der Koeffizientenvektor der linearen Funktion proportional zu einem kanonischen Basisvektor ist, so sind die dazu senkrechten Geraden achsenparallel, daher treffen Sie das Quadrat bei der ersten und letzten Berührung in einer ganzen Randseite. Hat der Koeffizientenvektor  $(a_1, a_2)$  dagegen nicht die Richtung eines kanonischen Basisvektors, so erfolgt der erste und der letzte Kontakt von  $Q$  mit einer zu  $(a_1, a_2)$  orthogonalen Geraden, die parallel in Richtung von  $(a_1, a_2)$  verschoben wird, jeweils in einem Eckpunkt von  $Q$ , und diese beiden Ecken sind die eindeutige Minimum- und Maximumstelle von  $f$  auf  $Q$ .

(5) Die Überlegungen aus (4) lassen sich analog auch in höheren Dimensionen durchführen. Wir betrachten dazu eine nichtkonstante *lineare Funktion*  $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + a_0$  auf einem Quader  $Q = [b_1, c_1] \times \dots \times [b_n, c_n]$  in  $\mathbb{R}^n$ . Da  $Q$  kompakt ist, nimmt  $f$  jedenfalls ein Minimum und ein Maximum an auf  $Q$ . Ist  $x$  ein Randpunkt, für den genau eine Komponente  $x_j$  den minimalen Wert  $b_j$  oder den maximalen Wert  $c_j$  annimmt, so kann man den Rand in einer Umgebung von  $x$  durch die Gleichung  $x_j = b_j$  bzw.  $x_j = c_j$  beschreiben. Das notwendige Kriterium für Randextremstellen zeigt in diesem Fall, dass  $x$  als Kandidat für eine Randextremstelle ausgeschlossen werden kann, außer  $\mathbf{a}$  und der  $j$ -te kanonische Basisvektor  $e_j$  sind linear abhängig. Im letzteren Fall sind offenbar die Randpunkte  $x$  mit  $x_j = b_j$  genau die Minimumstellen und die mit  $x_j = c_j$  genau die Maximumstellen von  $f$  auf  $Q$  oder umgekehrt, je nach Vorzeichen von  $\mathbf{a} = \pm |\mathbf{a}| e_j$ .

Das Randextremstellenkriterium liefert aber keine Information über die Randpunkte  $x$ , für die zwei oder mehr Komponenten den minimalen oder maximalen Wert annehmen. Hier kommt man mit der Parametrisierungsmethode weiter, indem man Randstücke, auf denen  $x_j$  für genau  $k$  Indizes  $j = j_1, \dots, j_k$  den Wert  $b_j$  bzw.  $c_j$  hat durch die anderen Variablen  $x_i \in ]b_i, c_i[$  parametrisiert,  $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$ , d.h. indem man  $f$  einfach nur noch als Funktion von diesen  $n-k$  Variablen  $x_i$  auffasst. Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle in dem so parametrisierten Bereich ist dann  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$  für die  $n-k$  Indizes  $i$ . Somit ist ein Randpunkt  $x$  von  $Q$  genau dann Extremstellenkandidat, wenn für alle Indizes  $i$ , für die  $b_i < x_i < c_i$  ist, die Komponenten  $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$  des Koeffizientenvektors  $\mathbf{a}$  der linearen Funktion  $f$  verschwinden.

Falls also  $\mathbf{a}$  keinen Nulleintrag hat, so bleiben nur Eckpunkte des Quaders (die Punkte  $x$  mit  $x_j \in \{b_j, c_j\}$  für alle  $j$ ) als Kandidaten, und Maximum und Minimum von  $f$  auf  $Q$  können nur in Ecken angenommen werden. In welchen Ecken, das hängt von den Vorzeichen der  $a_j$  ab; setzt man  $x_{*j} = b_j$ ,  $x_j^* = c_j$  im Fall  $a_j > 0$  und  $x_{*j} = c_j$ ,  $x_j^* = b_j$  andernfalls, so ist  $x_*$  die eindeutige Minimumstelle und  $x^*$  die eindeutige Maximumstelle von  $f$  auf  $Q$ . Sind einige Komponenten  $a_i = 0$ , so definiert man die  $x_{*j}$  und  $x_j^*$  in derselbe Weise nur für die Indizes  $j$  mit  $a_j \neq 0$  und kann die anderen Komponenten  $x_{*i}$ ,  $x_i^*$  beliebig in  $[b_i, c_i]$  wählen. Dann bilden die so definierten Punkte die Menge der Minimumstellen  $x_*$  bzw. der Maximumstellen  $x^*$  von  $f$  auf  $Q$ . Man sieht, dass Minimum und Maximum immer auch in Ecken angenommen werden (aber nicht nur in Ecken, wenn  $\mathbf{a}$  Nullkomponenten hat). Das haben wir in der Linearen Optimierung (siehe 3.6) schon allgemeiner für die Extremstellenbestimmung bei linearen Funktionen auf konvexen Polyedern überlegt. Wenn man also nur die Extremwerte der linearen Funktion auf  $Q$  wissen will und nicht unbedingt *alle* Extremstellen, so braucht man nur einen Wertevergleich für die Funktionswerte in den Ecken anzustellen.

(Alles was wir hier gezeigt haben, lässt sich viel einfacher durch direkte Diskussion von  $f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0$  auf dem Quader  $Q$  erledigen. Weil diese Funktion monoton von jeder Variablen  $x_j$  abhängt, ist nämlich klar, dass sie ihr Minimum bzw. Maximum genau dann erreicht, wenn dies für jeden Summanden  $a_jx_j$  eintritt auf dem Intervall  $b_j \leq x_j \leq c_j$ . Es kam uns hier aber darauf an, die notwendigen Kriterien für die Bestimmung von Randextremstellen exemplarisch vorzuführen.)

(6) Wenn man zu nichtlinearen Zielfunktionen  $f$  übergeht, wird die Berechnung der Randkandidaten auch auf einfachen Optimierungsbereichen wie Kugeln oder Quadern in  $\mathbb{R}^n$  schnell so kompliziert, dass die entsprechenden Gleichungen nicht mehr explizit gelöst werden können. Ein mit Hilfe der Linearen Algebra noch gut behandelbarer Fall ist die *Optimierung von quadratischen Funktionen*  $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot Ax + \mathbf{b} \cdot x + b_0$  auf solchen Bereichen. Dabei ist  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix,  $\mathbf{b}$  ein Koeffizientenvektor in  $\mathbb{R}^n$  und  $b_0 \in \mathbb{R}$ . Es gilt dann  $\nabla f(x) = Ax + \mathbf{b}$ , und die notwendige Bedingung für Randextremstellen von  $f$  auf einem Bereich  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq c\}$ , dessen Rand durch die Gleichung  $g(x) = c$  mit der differenzierbaren Funktion  $g$  beschrieben wird, lautet (für Randpunkte  $x \in \partial D$  mit  $\nabla g(x) \neq 0$ ):

$$Ax + \mathbf{b} = \lambda \nabla g(x), \quad g(x) = c.$$

Diese Bedingung liefert die Kandidaten für Randextremstellen (zusammen mit den Nullstellen von  $\nabla g$  im Rand, wenn es solche gibt). Anders als bei linearen Funktionen kann es bei quadratischen Funktionen aber auch Extremstellenkandidaten im Inneren geben.

Betrachten wir zunächst die abgeschlossene Einheitskugel  $\mathbb{B}^n = B_1(0)$  um den Ursprung des  $\mathbb{R}^n$ , die beschrieben wird durch  $g(x) = \frac{1}{2}|x|^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2) \leq \frac{1}{2}$  mit  $\nabla g(x) = x$  (deshalb haben wir den Faktor  $\frac{1}{2}$  bei  $g$  geschrieben) und eine homogen quadratische Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot Ax$ . Die notwendige Bedingung für Randextremstellen lautet dann:

$$Ax = \lambda x, \quad |x| = 1,$$

d.h. die Randkandidaten sind genau die Eigenvektoren von  $A$  mit (Euklidischer) Länge 1. Da  $\mathbb{B}^n$  kompakt ist, also  $f$  ein Minimum und ein Maximum auf  $\mathbb{B}^n$  annimmt, und da  $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot Ax$  in allen inneren kritischen Punkten  $x$  (also  $Ax = 0$ ) den Wert 0 hat, sieht man, dass  $f$  sein Maximum oder Minimum auf  $\mathbb{B}^n$  in einem Randpunkt  $x$  annimmt. Dort ist dann das notwendige Kriterium für Randextremstellen erfüllt, also ist  $x$  ein Eigenvektor der Norm 1, und der zugehörige Eigenwert ist gerade der doppelte Funktionswert  $2f(x) = x \cdot Ax = x \cdot (\lambda x) = \lambda|x|^2 = \lambda$ . Damit ist gezeigt:

- Die Kandidaten für Randextremstellen einer homogen quadratischen Funktion  $x \cdot Ax$  auf der Einheitskugel  $\mathbb{B}^n$  sind genau die Eigenvektoren der Euklidischen Norm 1 zur symmetrischen Matrix  $A$ ;
- es gibt mindestens zwei Randextremstellen  $\pm x$  und damit mindestens einen reellen Eigenwert von  $A$ ;
- wenn  $A$  einen nichtnegativen Eigenwert hat, so ist der größte Eigenwert  $\lambda_{\max}$  von  $A$  das Maximum von  $x \cdot Ax$  auf  $\mathbb{B}^n$  und wird am Rand von  $\mathbb{B}^n$  angenommen (im Fall  $\lambda_{\max} > 0$  auch nur dort);
- wenn  $A$  einen nichtpositiven Eigenwert hat, so ist der kleinste Eigenwert  $\lambda_{\min}$  von  $A$  das Minimum von  $x \cdot Ax$  auf  $\mathbb{B}^n$  und wird am Rand von  $\mathbb{B}^n$  angenommen (im Fall  $\lambda_{\min} < 0$  auch nur dort).

(Das alles kann man auch ohne Differentialrechnung aus der Hauptachsentransformation  $f(x) = \lambda_1(x \cdot u_1)^2 + \dots + \lambda_n(x \cdot u_n)^2$  mit einer Orthonormalbasis von Eigenvektoren  $u_1, \dots, u_n$  und den zugehörigen reellen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ablesen; siehe 3.5.)

Bei allgemeinen quadratischen Funktionen  $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot Ax + \mathbf{b} \cdot x + b_0$  und allgemeinen Kugeln  $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\}$  lautet die notwendige Bedingung für Randkandidaten

$$Ax + \mathbf{b} = \lambda(x - a), \quad |x - a| = r.$$

Man kann sie äquivalent  $(\lambda \mathbb{I} - A)(x - a) = Aa + \mathbf{b}$  umschreiben. Die Randkandidaten sind genau die Lösungen  $x$  eines solchen linearen Gleichungssystems (für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) mit  $|x - a| = r$ . Ist  $\lambda$  kein Eigenwert von  $A$ , also  $\lambda \mathbb{I} - A$  invertierbar, so gibt es genau eine Lösung  $x = a + (\lambda \mathbb{I} - A)^{-1}(Aa + \mathbf{b})$ , und die Berechnung der Norm  $|x - a| = |(\lambda \mathbb{I} - A)^{-1}(Aa + \mathbf{b})|$  erweist, ob diese eindeutige Lösung Randkandidat ist (wenn  $|x - a| = r$ ) oder nicht (wenn  $|x - a| \neq r$ ). Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ , so hat das lineare Gleichungssystem entweder gar keine Lösung oder der Lösungsraum ist ein affiner Unterraum der Dimension  $\geq 1$  und sein Durchschnitt mit der Sphäre  $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$  gibt die zu diesem Wert  $\lambda$  gehörenden Randkandidaten. Außerdem sind noch die inneren Kandidaten für Extremstellen zu berücksichtigen, also die  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $Ax + \mathbf{b} = 0$  und  $|x - a| < r$ . Auch dort kann durchaus ein absolutes Extremum liegen (wie z.B. das Minimum im Punkt  $a$ , wenn  $f(x) = |x - a|^2$  ist). In jedem Fall erhält man eine vollständige Liste von Extremstellenkandidaten für  $f$  auf  $B_r(a)$ , wenn man für jeden Wert  $\lambda \in \mathbb{R}$  wie beschrieben die Randkandidaten ermittelt und dann noch die inneren Kandidaten hinzufügt. Aus dieser Liste können dann durch Wertevergleich alle absoluten Minimum- und Maximumstellen herausgezogen werden.

(7) Als Beispiel der Extremstellenbestimmung für eine *quadratische Funktion auf einem Bereich mit Ecken* betrachten wir

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - x + y \quad \text{auf dem Quadrat } Q = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2.$$

Es ist  $\nabla f(x, y) = (2x - 2y - 1, 2y - 2x + 1)$  und die kritischen Punkte von  $f$  sind alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $x - y = \frac{1}{2}$ . (Das sind so viele, weil  $f(x, y) = (x - y)^2 - (x - y)$  in Wirklichkeit nur von einer Variablen  $x - y$  abhängt.) In allen kritischen Punkten hat  $f$  den Wert  $-\frac{1}{4}$ . Um die Randkandidaten zu bestimmen, teilen wir den Rand wie in (4) auf in die vier durch  $y = 0$  oder  $y = 1$  und  $0 < x < 1$  bzw.  $x = 0$  oder  $x = 1$  und  $0 < y < 1$  beschriebenen Strecken. Die Bedingung, dass  $\nabla f(x, y)$  auf dem Rand senkrecht steht, lautet dann  $0 < x < 1, y = 0, (2x - 1, 1 - 2x) \cdot (1, 0) = 0$ , bzw.  $0 < x < 1, y = 1, (2x - 3, 3 - 2x) \cdot (1, 0) = 0$ , bzw.  $x = 0, 0 < y < 1, (-2y - 1, 2y + 1) \cdot (0, 1) = 0$ , bzw.  $x = 1, 0 < y < 1, (1 - 2y, 2y - 1) \cdot (0, 1) = 0$ . Das liefert genau zwei Randkandidaten  $(\frac{1}{2}, 0)$  und  $(1, \frac{1}{2})$  in denen  $f$  wiederum den Wert  $-\frac{1}{4}$  hat. Aber das Quadrat ist kompakt,  $f$  nimmt darauf Minimum und Maximum an und ist nicht konstant, also kann  $f$  nicht in allen Kandidaten für Extremstellen denselben Wert haben. Es fehlen somit noch Kandidaten für eine vollständige Liste, und zwar (wie wir aus (4) wissen) die Ecken, in denen das notwendige Kriterium für Randextremstellen ja nicht anwendbar ist. In den Ecken hat  $f$  die Werte  $f(0, 0) = f(1, 0) = f(1, 1) = 0$  und  $f(0, 1) = 2$ , also wird das Maximum 2 von  $f$  auf dem Quadrat  $Q$  nur in der Ecke  $(0, 1)$  erreicht und das Minimum  $-\frac{1}{4}$  in allen Punkten  $(x, x - \frac{1}{2})$  mit  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ .

(8) Ein abschließendes Beispiel höheren Grades:

$$f(x, y) = x^4 - y^2 \rightsquigarrow \text{opt.} \quad \text{auf der Einheitskreisscheibe } \mathbb{B}^2 \subset \mathbb{R}^2.$$

Die Kreisscheibe wird beschrieben durch  $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$ . Die Berechnung des Gradienten  $\nabla f(x, y) = (4x^3, -2y)$  zeigt, dass der Ursprung  $(0, 0)$  der einzige kritische Punkt von  $f$  und der einzige innere Extremstellenkandidat ist. Die notwendige Bedingung für Randkandidaten lautet wegen  $\nabla g(x, y) = 2(x, y)$ :

$$\begin{pmatrix} 4x^3 \\ -2y \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Falls  $x \neq 0, y \neq 0$  ist, so folgt  $\lambda = -1 < 0$  und  $\lambda = 2x^2 \geq 0$  aus der ersten Gleichung, also gibt es solche Lösungen  $(x, y)$  nicht. Die Punkte  $(\pm 1, 0)$  und  $(0, \pm 1)$  sind aber offenbar Lösungen bei passender Wahl von  $\lambda$ , also bilden diese Punkte eine vollständige Liste von Randkandidaten. Die Berechnung der Funktionswerte  $f(0, 0) = 0, f(\pm 1, 0) = 1, f(0, \pm 1) = -1$  in den insgesamt 5 Punkten der vollständigen Kandidatenliste zeigt (da die Extremwerte auf der kompakten Menge  $\mathbb{B}^2$  angenommen werden), dass  $(\pm 1, 0)$  die beiden Maximumstellen und  $(0, \pm 1)$  die beiden Minimumstellen von  $f$  auf der Kreisscheibe sind. Der innere kritische Punkt  $(0, 0)$  mit  $f(0, 0) = 0$  ist ein Sattelpunkt, da  $f$  offenbar beliebig nahe bei  $(0, 0)$  sowohl positive als auch negative Werte hat.

(Das Ergebnis hätte man einfacher durch direkte Inspektion der Funktion erhalten können; denn weil  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$  gilt für alle  $(x, y) \in \mathbb{B}^2$ , ist klar, dass  $-1 \leq f \leq 1$  auf  $\mathbb{B}^2$  ist, wobei der Wert  $-1$  nur in  $(0, \pm 1)$  und der Wert  $1$  nur in  $(\pm 1, 0)$  erreicht werden kann. Es ging uns aber hier nicht um die Extremstellenbestimmung für diese einfache Funktion, sondern um die exemplarische Vorführung der allgemeinen Methode.) ■

**BEISPIELE (ökonomische Anwendungen der Extremstellen am Rand):**

(1) Wir betrachten eine *Cobb–Douglas–Produktionsfunktion*

$$x(r_1, \dots, r_n) = c r_1^{s_1} r_2^{s_2} \cdot \dots \cdot r_n^{s_n}$$

und die zugehörige *Gewinnfunktion* bei konstantem Marktpreis  $p$  und linearer Kostenfunktion  $K(r_1, \dots, r_n) = k_1 r_1 + \dots + k_n r_n + k_0$ ,

$$\begin{aligned} G(r_1, \dots, r_n) &= p x(r_1, r_2, \dots, r_n) - K(r_1, r_2, \dots, r_n) \\ &= p c r_1^{s_1} r_2^{s_2} \cdot \dots \cdot r_n^{s_n} - k_1 r_1 - k_2 r_2 - \dots - k_n r_n - k_0. \end{aligned}$$

(Alle Konstanten  $p, c, s_1, \dots, s_n, k_1, \dots, k_n$  seien positiv und  $k_0 \geq 0$ .) Der natürliche Definitionsbereich für  $G$  ist —wenn man von Kapazitätsgrenzen absieht— der abgeschlossene Bereich  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  der (komponentenweise) nichtnegativen Vektoren  $r = (r_1, \dots, r_n)$ . Dieser Bereich ist unbeschränkt, also nicht kompakt, und die Existenz einer Maximumstelle der Gewinnfunktion darauf nicht klar. Tatsächlich existiert auch keine, wenn die Exponentensumme  $s = s_1 + s_2 + \dots + s_n > 1$  ist, weil dann  $G(tr) = t^s p x(r) - tK(r) + (1-t)k_0 \rightarrow \infty$  geht bei  $t \rightarrow \infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{> 0}^n$ . Auch im Fall  $s = 1$  existiert keine Maximumstelle, da dann  $G(r) + k_0$  homogen vom Grad 1 ist und beliebig große Werte auf  $\mathbb{R}_{> 0}^n$  annimmt, es sei denn man hat  $G(r) \leq k_0$  für alle  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ , so dass  $G$  ein Maximum  $-k_0 \leq 0$  in  $r = 0$  annimmt, in welchem Fall aber nicht mit (positivem) Gewinn produziert werden kann.

Im Fall  $0 < s < 1$  aber strebt  $G(r) \rightarrow -\infty$  bei  $|r| \rightarrow \infty, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ ; denn auf der kompakten Menge  $\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : |r| = 1\}$  hat der Produktions–Output  $x(r)$  ein endliches Maximum  $x^*$  und die variable Kostenfunktion  $K(r) - k_0$  ein positives Minimum  $k_*$ , so dass  $G(r) = p x(r) - K(r) = |r|^s p x(\frac{1}{|r|} r) - |r|(K(\frac{1}{|r|} r) - k_0) - k_0 \leq |r|^s p x^* - |r|k_* - k_0 \rightarrow -\infty$  gilt bei  $|r| \rightarrow \infty$ . Nach dem Zusatz zum Extremstellensatz in 5.4 existiert daher (mindestens) eine Maximumstelle  $r^*$  von  $G$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ . In jedem Randpunkt  $r$  von  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  ist nun mindestens ein Produktionsfaktoreinsatz  $r_j = 0$ , und daher gilt  $G(r) = p x(r) - K(r) = 0 - K(r) \leq -k_0 \leq 0$  in Randpunkten. Für innere Punkte  $r \in \mathbb{R}_{> 0}^n$  und kleine  $t > 0$  gilt andererseits  $G(tr) = t^s p x(r) - t(K(r) - k_0) - k_0 > -k_0$ ; denn wegen  $s < 1$  ist der erste Summand größer als der zweite für hinreichend kleine  $t > 0$ . Folglich ist das Maximum von  $G$  größer als  $-k_0$  und kann nicht am Rand angenommen werden, d.h. die Maximumstellen liegen im Inneren. Die inneren Extremstellenkandidaten, also die Nullstellen des Gradientenfeldes  $\nabla G$  können ausgerechnet werden. Das Resultat ist der schon in 5.4 berechnete einzige innere kritische Punkt  $r^* = (r_1^*, \dots, r_n^*) \in \mathbb{R}_{> 0}^n$  mit

$$r_j^* = (cp)^{\frac{1}{1-s}} \left(\frac{s_1}{k_1}\right)^{\frac{s_1}{1-s}} \left(\frac{s_2}{k_2}\right)^{\frac{s_2}{1-s}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{s_n}{k_n}\right)^{\frac{s_n}{1-s}} \cdot \frac{s_j}{k_j} \quad \text{für } j = 1 \dots n,$$

der die eindeutige absolute Maximumstelle von  $G$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  ist. Wir fassen zusammen:

- Die Gewinnfunktion  $G$  zu einer *Cobb–Douglas–Produktionsfunktion* bei konstantem Preis und linearer Kostenfunktion ist auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  von oben unbeschränkt und hat kein Maximum, wenn  $s = s_1 + \dots + s_n > 1$  ist oder  $s = 1$  und  $G$  irgendwo  $> -k_0$ ;
- im Fall  $0 < s < 1$  hat  $G$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  genau die oben angegebene Maximumstelle  $r^*$ , und diese liegt im Inneren  $\mathbb{R}_{> 0}^n$ .

Das Ergebnis ist ökonomisch plausibel, wenn man bedenkt, dass die Kosten hier linear wachsen und der Erlös mit dem Exponenten  $s$ . Mit der Existenz der Maximumstelle  $r^*$  im Fall  $0 < s < 1$  ist aber noch nicht gesagt, dass überhaupt mit Gewinn produziert werden kann. Dazu muss nämlich das Gewinnmaximum  $G(r^*)$  positiv sein.

(2) Wir untersuchen die Maximumstellen der Gewinnfunktion aus (1)

$$G(r_1, \dots, r_n) = pc r_1^{s_1} r_2^{s_2} \cdot \dots \cdot r_n^{s_n} - k_1 r_1 - k_2 r_2 - \dots - k_n r_n - k_0$$

nun bei *einer einzigen Kapazitätsrestriktion*  $x_n \leq c_n$  mit gegebener Kapazitätsgrenze  $c_n > 0$ . Der Optimierungsbereich ist jetzt also  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{n-1} \times [0, c_n]$ . Unter den (ökonomisch sinnvollen) Positivitätsannahmen, die wir in (1) für die verschiedenen Parameter gemacht haben, sowie der weiteren (ebenfalls sinnvollen) Annahme  $0 < s = s_1 + \dots + s_n < 1$  gibt es gemäß (1) genau eine absolute Maximumstelle  $r^*$  zu  $G$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ . Falls dieser Faktoreinsatzvektor  $r^*$  der Kapazitätsrestriktion genügt, falls also

$$r_n^* = (cp)^{\frac{1}{1-s}} \left(\frac{s_1}{k_1}\right)^{\frac{s_1}{1-s}} \left(\frac{s_2}{k_2}\right)^{\frac{s_2}{1-s}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{s_n}{k_n}\right)^{\frac{s_n}{1-s}} \cdot \frac{s_n}{k_n} \leq c_n$$

ausfällt, so ist diese Stelle  $r^*$  natürlich auch die eindeutige Maximumstelle von  $G$  auf dem jetzigen Optimierungsbereich  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{n-1} \times [0, c_n]$ . Andernfalls muss das Maximum an der Kapazitätsgrenze, also an einer Stelle  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  mit  $r_n = c_n$  angenommen werden, wobei die Argumente aus (1) zeigen, dass diese Stelle in  $\mathbb{R}_{> 0}^n$  liegen muss. Die notwendige Bedingung für solche Randmaximumstellen von  $G$  lautet nun

$$\nabla G(r) = \lambda e_n, \quad r_n = c_n \quad (r \in \mathbb{R}_{> 0}^n);$$

denn der betrachtete Teil des Randes wird durch die Gleichung  $g(r) = r_n = c_n$  mit  $\nabla g(r) = e_n$  in  $\mathbb{R}_{> 0}^n$  beschrieben, wobei  $g \leq c_n$  ist auf dem Optimierungsbereich. Mit

$$\nabla G(r) = \left( px(r) \frac{s_1}{r_1} - k_1, \dots, px(r) \frac{s_n}{r_n} - k_n \right)$$

folgt

$$r_j = px(r) \frac{s_j}{k_j} \quad \text{für } j = 1 \dots n-1, \quad r_n = c_n.$$

Somit sind die gesuchten Randkandidaten von der Form  $r = (t \frac{s_1}{k_1}, \dots, t \frac{s_{n-1}}{k_{n-1}}, c_n)$  mit  $t > 0$ , und  $t$  lässt sich dabei z.B. aus der Gleichung  $px(r) \frac{s_1}{k_1} - k_1 = 0$  berechnen. Als Resultat ergibt sich im Fall  $r_n^* > c_n$  als einziger Randkandidat die Stelle  $r$  mit

$$r_n = c_n, \quad r_j = (pc c_n^{s_n})^{\frac{1}{1-s+s_n}} \left(\frac{s_1}{k_1}\right)^{\frac{s_1}{1-s+s_n}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{s_{n-1}}{k_{n-1}}\right)^{\frac{s_{n-1}}{1-s+s_n}} \cdot \frac{s_j}{k_j} \quad \text{für } j = 1 \dots n-1.$$

Diese Stelle  $r$  ist der **Gewinn-optimale Faktoreinsatz bei einer einzigen Kapazitätsschranke**, sofern der optimale Einsatzvektor  $r^*$  ohne Kapazitätsbeschränkung die Restriktion  $r_n^* \leq c_n$  nicht erfüllt. Im Fall  $r_n^* = c_n$  gilt dabei  $r = r^*$ .

(3) Das Ergebnis (2) hätten wir auch so finden können: Wenn die optimale Produktion bei Erreichen der Kapazitätsgrenze  $r_n = c_n$  realisiert wird, so lautet die Gewinnfunktion  $G(r_1, \dots, r_{n-1}, c_n)$ , als Funktion der  $n-1$  Variablen  $(r_1, \dots, r_{n-1}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n-1}$ ,

$$\tilde{G}(r_1, \dots, r_{n-1}) = c c_n^{s_n} r_1^{s_1} \cdot \dots \cdot r_{n-1}^{s_{n-1}} - k_1 r_1 - \dots - k_{n-1} r_{n-1} - (k_0 + k_n c_n).$$

Diese Funktion ist von demselben Typ wie die Gewinnfunktion in (1), mit  $n-1$  statt  $n$ ,  $s_1 + \dots + s_{n-1} = s - s_n$  statt  $s$ ,  $c c_n^{s_n}$  statt  $c$  und  $k_0 + k_n c_n$  statt  $k_0$ . Sie hat daher eine eindeutige Maximumstelle auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{n-1}$ , die wie in (1) berechnet werden kann, und das liefert sofort die in (2) angegebene Randextremstelle bzgl. des Optimierungsbereichs  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{n-1} \times [0, c_n]$ .

Ist nun eine weitere Kapazitätseinschränkung  $r_{n-1} \leq c_{n-1}$  gegeben ( $c_{n-1} > 0$ ), so sind drei Fälle zu unterscheiden: Entweder der für die alleinige Restriktion  $r_n \leq c_n$  berechnete optimale Faktoreinsatzvektor  $r$  erfüllt auch schon die Restriktion  $r_{n-1} \leq c_{n-1}$ ; oder der für die alleinige Restriktion  $r_{n-1} \leq c_{n-1}$  optimale Faktoreinsatzvektor  $r$  erfüllt auch schon die Restriktion  $r_n \leq c_n$ ; oder beides trifft nicht zu. Im dritten Fall kommen nur  $r$  mit  $r_n = c_n$  und  $r_{n-1} = c_{n-1}$  als Randextremstellen in Frage, und man hat dann  $G(r_1, \dots, r_{n-2}, c_{n-1}, c_n)$  als Funktion von  $(r_1, \dots, r_{n-1}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n-2}$  zu minimieren. Als optimaler Faktoreinsatzvektor ergibt sich gemäß (1) dann  $r$  mit  $r_{n-1} = c_{n-1}$ ,  $r_n = c_n$  und, für  $j = 1 \dots n-2$ ,

$$r_j = (p c c_n^{s_n} c_{n-1}^{s_{n-1}})^{\frac{1}{1-\sigma}} \left(\frac{s_1}{k_1}\right)^{\frac{s_1}{1-\sigma}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{s_{n-2}}{k_{n-2}}\right)^{\frac{s_{n-2}}{1-\sigma}} \cdot \frac{s_j}{k_j} \quad \text{mit } \sigma = \sum_{i=1}^{n-2} s_i.$$

Es ist klar, wie dieses Verfahren nun fortgesetzt wird. Allgemein bestimmt man bei Kapazitätseinschränkungen  $r_j \leq c_j$  mit gegebenen  $0 < c_j \leq \infty$  für  $j = 1 \dots n$  ( $c_j = \infty$  bedeutet natürlich, dass keine Kapazitätseinschränkung für den  $j$ -ten Produktionsfaktor besteht) die *effektiven Kapazitätsbeschränkungen*, indem man für alle Auswahlen von endlich vielen verschiedenen Nummern  $j_1, \dots, j_k$  aus  $\{j : 1 \leq j \leq n, c_j < \infty\}$  die Gewinnfunktion bei fixierten Variablen  $r_j = c_j$  für  $j = j_1, \dots, j_k$  maximiert und dann die Menge  $J = \{j_1, \dots, j_k\}$  von Indizes so wählt, dass für den zugehörigen optimalen Faktoreinsatzvektor  $r$  die restlichen Einschränkungen  $r_i \leq c_i$  für  $i \notin J$  auch noch erfüllt sind, aber nicht mehr bei Weglassen einer Kapazitätsgrenze  $r_{j_h} \leq c_{j_h}$ , und dass der Wert der Gewinnfunktion  $G(r)$  bei dieser Wahl der Indizes  $j_1, \dots, j_k$  maximal wird. Im Extremfall ist dann  $k = n$ ,  $J = \{1, \dots, n\}$ , d.h. bei optimaler Produktion werden alle Produktionsfaktoren an ihrer Kapazitätsgrenze eingesetzt. "Effektiv" sind die Kapazitätsrestriktionen  $r_j \leq c_j$  mit  $j \in J$  dann in dem Sinne, dass die Aufhebung einer dieser Kapazitätseinschränkungen zu einem optimalen Faktoreinsatzvektor  $r$  mit  $r_j > c_j$  führt. (Es kann "zufällig" auch  $r_i = c_i$  für Indizes  $i \notin J$  eintreten, aber die Aufhebung dieser Kapazitätsgrenzen  $r_i \leq c_i$  wird den optimalen Faktoreinsatzvektor dann nicht verändern.) Der **optimale Faktoreinsatzvektor bei beliebig vielen Kapazitätsrestriktionen** ist dann (mit  $J \subset \{1, \dots, n\}$  ermittelt wie oben beschrieben)

$$r_j = c_j \quad \text{für } j \in J \quad (\text{effektive Kapazitätsrestriktionen})$$

und mit der Abkürzung  $\sigma = \sum_{i \notin J} s_i$

$$r_i = \left[ \left( p c \prod_{j \in J} c_j^{s_j} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \prod_{h \notin J} \left( \frac{s_h}{k_h} \right)^{\frac{s_h}{1-\sigma}} \right] \frac{s_i}{k_i} \quad \text{für } i \notin J.$$

Weil der Faktor [...] nicht vom Index  $i$  abhängt, kann man hieraus ablesen, dass  $r_h/r_i = \frac{s_h/k_h}{s_i/k_i}$  ist für alle Indizes  $h, i \notin J$ , das heißt:

- Bei optimalem Faktoreinsatz hängt das Faktoreinsatzverhältnis

$$\frac{r_h}{r_i} = \frac{s_h/k_h}{s_i/k_i}$$

für Faktoren, bei denen keine Kapazitätsrestriktion wirksam ist, nur ab vom Verhältnis der entsprechenden Exponenten in der Cobb–Douglas–Produktionsfunktion und vom Verhältnis der zugehörigen Faktorkostensätze in der linearen Kostenfunktion. ■

Die Bestimmung von Randextremstellen ist, wenn man nur Funktionswerte an Stellen im Rand  $\partial D$  eines Optimierungsbereiches  $D \subset \mathbb{R}^n$  miteinander vergleicht, eine Optimierungsaufgabe auf einer niederdimensionalen Menge in  $\mathbb{R}^n$ ; denn der Rand ist ja bei den üblichen Bereichen wie Kugeln, Quadern, nichtnegativen Quadranten / Oktanten in  $\mathbb{R}^n$  eine Menge der Dimension  $n-1$ . Wir betrachten nun eine allgemeine Situation, wo der Optimierungsbereich  $S$  im  $\mathbb{R}^n$  eine niederdimensionale Menge ist, die durch eine Gleichung  $g(x) = c$  oder durch mehrere Gleichungen  $g_1(x) = c_1, \dots, g_l(x) = c_l$  beschrieben wird. Diese Gleichungen, welche die bei der Optimierung zulässigen Stellen  $x$  einschränken, heißen auch "Nebenbedingungen" und die Aufgabe, eine gegebene reelle Funktion  $f$  auf der niederdimensionalen Menge  $S$  zu optimieren, heißt dementsprechend **Extremstellenbestimmung bei Nebenbedingungen**.

Typische Nebenbedingungen, die in der Praxis oft auftreten, sind *lineare Nebenbedingungen*

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b;$$

mehrere solche Bedingungen beschreiben einen affinen Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ , (der Dimension  $n-l$ , wenn die Koeffizientenvektoren linear unabhängig und die linearen Gleichungen konsistent sind; siehe Kap. 3), und die Aufgabe ist dann, die Funktion auf diesem Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  zu maximieren bzw. zu minimieren. Auch *quadratische Nebenbedingungen*

$$\frac{1}{2}x \bullet Ax + \mathbf{b} \bullet x + c = 0$$

kommen vor, zum Beispiel bedeutet die Nebenbedingung

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2,$$

dass  $f$  auf der Sphäre  $S_r(a)$  um den Mittelpunkt  $a \in \mathbb{R}^n$  mit Radius  $r > 0$  optimiert werden soll. Fügt man  $l$  unabhängige lineare Nebenbedingungen hinzu, so definieren die Bedingungen zusammen (wenn sie konsistent sind) eine Sphäre der Dimension  $n-l-1$  in einem  $(n-l)$ -dimensionalen Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ , und die Aufgabe ist die Optimierung der Funktion  $f$  auf dieser niederdimensionalen Sphäre, z.B. also auf einer 1-dimensionalen Kreislinie in  $\mathbb{R}^3$ .

Die Idee, wie man derartige Optimierungsprobleme auf niederdimensionalen Bereichen in  $\mathbb{R}^n$  angeht, ist folgende: Sind die Funktionen  $g_1, \dots, g_l$  (stetig) differenzierbar mit linear unabhängigen Gradienten  $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_l(x)$  an allen Stellen  $x$ , welche die Nebenbedingungen erfüllen, so kann man zeigen (siehe 5.7), dass die durch  $g_1(x) = c_1, \dots, g_l(x) = c_l$  definierte Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$  eine glatte Fläche der Dimension  $n-l$  ist. Dies bedeutet, dass man  $S$  lokal bei jedem Punkt  $x \in S$  nach einer Drehung als Graph einer  $\mathbb{R}^l$ -wertigen differenzierbaren Funktion von  $n-l$  Variablen darstellen kann. Ein Vektor  $u \in \mathbb{R}^n$ , der zu allen Gradienten  $\nabla g_i(x)$  an einer Stelle  $x \in S$  senkrecht ist, lässt sich dann als Tangentenvektor an  $S$  im Punkt  $x$  auffassen. Bewegt man sich von  $x$  in Richtung von  $u$  zu  $x + tu$ , so bleiben zwar die Nebenbedingungen vielleicht nicht exakt erhalten, aber die Werte der Funktionen  $g_i$  ändern sich nur marginal für  $|t| \ll 1$ , weil ja  $\frac{d}{dt}g_i(x + tu)|_{t=0} = \partial_u g_i(x) = u \bullet \nabla g_i(x) = 0$  ist.

Wenn nun z.B.  $f$  eine lokale Minimumstelle auf  $S$  an der Stelle  $x$  hat, so würde  $f(x + tu) \geq f(x)$  gelten für kleine  $|t|$ , wenn  $x + tu$  die Nebenbedingungen exakt erfüllen, also auf  $S$  liegen würde. Da aber  $x + tu$  die Nebenbedingungen immerhin von erster Ordnung erfüllt bei  $t \rightarrow 0$ , wird man erwarten dürfen, dass wenigstens der Limes von  $\frac{1}{t}[f(x + tu) - f(x)]$  nichtnegativ ist bei  $t \searrow 0$  und nichtpositiv bei  $t \nearrow 0$ . Das bedeutet aber



$0 \leq \partial_u f(x) \leq 0$ , also  $0 = \partial_u f(x) = u \bullet \nabla f(x)$ . Damit haben wir überlegt, dass jeder zu den  $\nabla g_i(x)$  orthogonale Vektor  $u$  auch zu  $\nabla f(x)$  orthogonal ist, wenn  $f$  eine lokale Extremstelle auf  $S$  im Punkt  $x$  hat, und das bedeutet  $\nabla f(x) \in (\mathbb{R}\nabla g_1(x) + \dots + \mathbb{R}\nabla g_l(x))^{\perp} = \mathbb{R}\nabla g_1(x) + \dots + \mathbb{R}\nabla g_l(x)$ , d.h.  $\nabla f(x)$  ist linear abhängig von  $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_l(x)$ . Diese algebraische Bedingung an die Gradienten ist also eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer lokalen Extremstelle von  $f$  auf  $S$  im Punkt  $x$ .

Das heuristische Argument lässt sich zu einem exakten Beweis ausbauen, indem man zu  $u$  wie oben eine Kurve  $c(t)$  statt  $x+tu$  mit  $c(0) = x$  und  $c'(0) = u$  konstruiert, die in  $S$  verläuft, d.h. die Nebenbedingungen  $g_i(c(t))$  sind für Punkte auf der Kurve exakt erfüllt. (Das geht mit dem Satz über implizite Funktionen in 5.7.) Hat nun  $f$  eine lokale Extremstelle auf  $S$  im Punkt  $x = c(0)$ , so ist  $t = 0$  dann lokale Extremstelle der Funktion  $t \mapsto f(c(t))$ , und es folgt  $0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(c(t)) = \partial_{c'(0)} f(c(0)) = \partial_u f(x) = u \bullet \nabla f(x)$ , so dass man wie oben schließen kann. Also gilt der

**SATZ (notwendige Bedingungen für Extremstellen bei Nebenbedingungen):**

Ist  $S \subset \mathbb{R}^n$  nahe  $x_0 \in S$  beschrieben durch Gleichungen (“Nebenbedingungen”)  $g_1(x) = c_1, \dots, g_l(x) = c_l$  und hat  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine lokale Extremstelle auf  $S$  im Punkt  $x_0$ , so gilt:

$$\nabla f(x_0), \nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_l(x_0) \quad \text{sind linear abhängig}$$

(sofern  $f, g_1, \dots, g_l$  bei  $x_0$  stetige partielle Ableitungen haben). Im Falle unabhängiger Nebenbedingungen, d.h.  $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_l(x_0)$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}^n$ , gibt es also eindeutige reelle Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  (die sog. **Lagrange-Multiplikatoren**) mit

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_l \nabla g_l(x_0).$$

Weil es ganz instruktiv ist, geben wir noch einen ganz anderen Beweis für diesen Satz an. Dazu nehmen wir an, dass  $S$  in einer kleinen Kugel  $B_\varepsilon(x_0)$  in  $\mathbb{R}^n$  durch die Nebenbedingungen beschrieben wird, für die wir ohne Einschränkung rechte Seiten  $c_i = 0$  annehmen können, also  $S \cap B_\varepsilon(x_0) = \{x \in B_\varepsilon(x_0) : g_1(x) = 0, \dots, g_l(x) = 0\}$ , und dass  $x_0$  lokale Minimumstelle von  $f$  auf  $S$  ist, ohne Einschränkung mit dem Wert  $f(x_0) = 0$ . Für  $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$  ist  $x_0$  dann eindeutige Minimumstelle auf  $S \cap B_\varepsilon(x_0)$ . Auf  $S \cap S_r(x_0) = \{x \in S : |x - x_0| = r\}$  ist also überall  $f_\varepsilon > 0$  und wegen der Stetigkeit von  $f_\varepsilon$  gilt das auch noch auf einer offenen Menge  $U \supset S \cap S_r(x_0)$ . Auf der abgeschlossenen und beschränkten, also kompakten, Menge  $S_r(x_0) \setminus U$  hat  $f_\varepsilon$  dann ein endliches Minimum  $\geq -C > -\infty$  (mit  $C \geq 0$ ). Andererseits hat die Funktion  $\sum_{i=1}^l g_i(x)^2$  auf dieser kompakten Menge ein positives Minimum, weil diese kompakte Menge keinen Punkt von  $S$  enthält, so dass nicht alle Summanden Null sein können. Es folgt, dass die Funktion  $h(x) = f_\varepsilon(x) + \frac{C}{\varepsilon} \sum_{i=1}^l g_i(x)^2$  überall positiv ist auf der Späre  $S_r(x_0) = \partial B_r(x_0)$  und den Wert 0 im Zentrum  $x_0$  hat, so dass sie nach dem Extremstellensatz eine innere Maximumstelle  $x_\varepsilon$  in  $B_\varepsilon(x_0)$  besitzt. Dort gilt dann  $0 = \nabla h(x_\varepsilon) = \nabla f_\varepsilon(x_\varepsilon) + 2 \sum_{i=1}^l g_i(x_\varepsilon) \nabla g_i(x_\varepsilon)$ , d.h.  $\nabla f_\varepsilon(x_\varepsilon) = \nabla f(x_\varepsilon) + 2\varepsilon(x_\varepsilon - x_0)$  und  $\nabla g_1(x_\varepsilon), \dots, \nabla g_l(x_\varepsilon)$  sind linear abhängig. Dies gilt nun für beliebig kleine  $\varepsilon > 0$  und mit  $\varepsilon \searrow 0$  folgt wegen der angenommenen Stetigkeit der Gradienten dieselbe Aussage auch für  $\varepsilon = 0$ , und das ist die Behauptung des Satzes. (Man betrachtet in der Matrix mit den Spalten  $\nabla f_\varepsilon(x_\varepsilon), \nabla g_1(x_\varepsilon), \dots, \nabla g_l(x_\varepsilon)$  irgendeine  $(l+1) \times (l+1)$ -Untermatrix; diese hat wegen der linearen Abhängigkeit Determinante Null und das gilt auch für die Grenzmatrix bei  $\varepsilon \searrow 0$ .) (Siehe 3.5 für dieses Minorenkriterium.)

**DISKUSSION:** 1) Im häufigsten Fall  $l = 1$  einer einzigen Nebenbedingung lautet die notwendige Bedingung für lokale Extremstellen  $x$  von  $f$  auf  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\}$ :

$$g(x) = c \quad \text{und} \quad \nabla f(x), \nabla g(x) \quad \text{sind linear abhängig.}$$

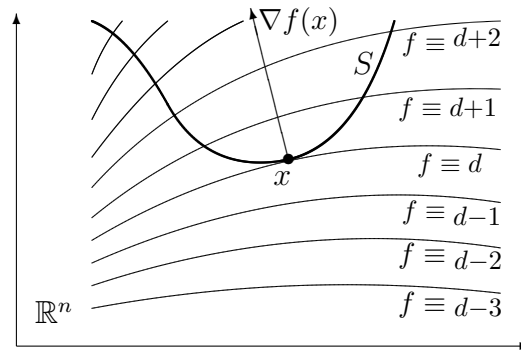
Wenn  $\nabla g \neq 0$  ist überall auf  $S$ , so kann dies äquivalent

$$g(x) = c, \quad \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}$$

formuliert werden. Wir kennen diese Bedingung schon von der Extremstellenbestimmung am Rand, der ja auch durch eine einzige Gleichung  $g(x) = c$  beschrieben wurde.

Die geometrische Interpretation ist, dass  $\nabla g(x)$  an allen Stellen  $x \in S$  senkrecht zur Niveaumenge  $S$  von  $g$  ist und dass in lokalen Extremstellen von  $f$  auf  $S$  auch der Gradient von  $f$  orthogonal zu  $S$  sein muss. Da die Tangentialebenen der Niveaumenge von  $f$  durch  $x$  orthogonal zu  $\nabla f(x)$  ist, stimmt sie also mit der Tangentialebene an die Niveaumenge  $S$  von  $g$  überein (sofern beide Gradienten  $\neq 0$  sind in  $x$ ), d.h. es gilt:

- In den lokalen Extremstellen  $x$  von  $f$  auf  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\}$  berühren sich die Niveaumengen von  $f$  und  $g$ .



2) Im allgemeinen Fall von  $l$  Nebenbedingungen  $g_i(x) = c_i$  ( $i = 1 \dots l$ ; natürlich ist nur  $l \leq n-1$  sinnvoll, sonst sagt der Satz nicht aus) mit linear unabhängigen Gradienten  $\nabla g_i(x)$  an allen Stellen  $x \in S$  lauten die notwendigen Bedingungen für Extremstellen von  $f$  auf  $S$ :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= c_1 \\ &\vdots \\ g_l(x) &= c_l \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) + \dots + \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_1}(x) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x) + \dots + \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_n}(x). \end{aligned}$$

Das sind  $n+l$  Gleichungen für  $n+l$  Unbekannte  $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l$ . An den Lagrange-Multiplikatoren ist man dabei oft nicht interessiert (obwohl sie manchmal ökonomisch interpretiert werden können), beim Lösen des Gleichungssystems wird man daher versuchen, zunächst  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  zu eliminieren. Die Komponenten  $x = (x_1, \dots, x_n)$  der Lösungen  $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l)$  geben die Kandidaten für Extremstellen von  $f$  auf  $S$ .

Die geometrische Interpretation der notwendigen Bedingungen ist ähnlich wie in (1). Die Gradienten  $\nabla g_i(x)$  an der Stelle  $x \in S$  sind linear unabhängig und orthogonal zu  $S$ , d.h. genauer zum  $(n-l)$ -dimensionalen Tangentialraum an  $S$  im Punkt  $x$ ; sie bilden daher eine Basis des sog. Normalraums zu  $S$  im Punkt  $x$ , der aus allen zum Tangentialraum orthogonalen Vektoren des  $\mathbb{R}^n$  besteht. Die lineare Abhängigkeit des Gradienten  $\nabla f(x)$  von den  $\nabla g_i(x)$  bedeutet daher, dass der Gradient von  $f$  in einer lokalen Extremstelle  $x \in S$  von  $f$  auf  $S$  orthogonal zu  $S$  sein muss. Das leuchtet auch anschaulich ein: Hätte der Gradient eine Komponente  $\neq 0$  in Richtung des Tangentialraums an  $S$  im Punkt  $x$  so könnte man den Wert  $f(x)$  vergrößern, indem man  $x$  in Richtung dieser Komponente auf  $S$  bewegt, und verkleinern, indem man die Gegenrichtung wählt.

(3) Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Lagrange-Multiplikatoren zu  $x_0$ , so kann man die notwendigen Bedingungen dafür, dass  $x$  lokale Extremstelle von  $f$  bei den Nebenbedingungen  $g_1(x) = c_1, \dots, g_l(x) = c_l$  ist, dadurch ausdrücken, dass  $x$  ein den Nebenbedingungen genügender kritischer Punkt der sog. **Lagrange-Funktion** ist:

$$f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_l g_l(x).$$

Es wird auch die **totale Lagrange-Funktion**

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) - \dots - \lambda_l g_l(x_1, \dots, x_n)$$

von  $n+l$  Variablen eingeführt. Sind alle  $c_i = 0$ , die Nebenbedingungen also in der Form  $g_i(x) = 0$  gestellt, so kann man die notwendige Bedingung für eine Extremstelle  $x \in \mathbb{R}^n$  von  $f$  bei den Nebenbedingungen äquivalent so formulieren:  $(x, \lambda)$  ist ein kritischer Punkt von  $L$  in  $\mathbb{R}^{n+l}$  für ein geeignetes  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$ . Diese Bedingung bedeutet nämlich erstens, dass  $0 = \frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \sum_{i=1}^l \lambda_i g_i(x)$  ist für  $j = 1 \dots, n$ , und zweitens, dass auch  $0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x, \lambda) = -g_i(x)$  ist für  $i = 1 \dots, l$ , so dass  $x$  auch die Nebenbedingungen erfüllt (da diese mit rechter Seite  $c_i = 0$  formuliert wurden!). Bei der Berechnung der Lösungen  $(x, \lambda)$  helfen diese Interpretationen als kritische Punkte der Lagrange-Funktionen aber nicht.

(4) Es ist im Allgemeinen *nicht richtig*, dass die Lagrange-Funktion  $f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_l g_l(x)$  eine lokale Minimumstelle auf  $\mathbb{R}^n$  in  $x_0$  haben muss, wenn ihr kritischer Punkt  $x_0 \in S$  eine lokale Minimumstelle von  $f$  bzgl. des Optimierungsbereiches  $S$  ist. Aber das Umgekehrte ist natürlich richtig: Wenn  $x_0$  lokale Minimumstelle der Lagrange Funktion auf  $\mathbb{R}^n$  ist und die Nebenbedingungen  $g_i(x_0) = c_i$  erfüllt, die  $S$  definieren, so ist  $x_0$  auch lokale Minimumstelle von  $f$  auf  $S$ ; denn für  $x \in S$  ist ja  $f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_l g_l(x) = f(x) - \lambda_1 c_1 - \dots - \lambda_l c_l$ , also unterscheidet sich die Lagrange-Funktion auf  $S$  von der Funktion  $f$  nur um eine Konstante (und überhaupt nicht, wenn alle  $c_i = 0$  sind, was man immer erreichen kann). Mit dieser Überlegung kann man unter Umständen nachweisen, dass ein Extremstellenkandidat  $x_0$  für  $f$  auf  $S$  tatsächlich Minimumstelle bzw. Maximumstelle von  $f$  auf  $S$  ist, indem man verifiziert, dass  $x_0$  Minimumstelle bzw. Maximumstelle einer Lagrange-Funktion zu  $f$  (mit geeigneten Parametern  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ ) auf  $\mathbb{R}^n$  ist.

(5) Ist  $S \subset \mathcal{O}$  global durch Gleichungen  $g_i(x) = c_i$  ( $i = 1 \dots, l$ ) beschrieben mit einer offenen Teilmenge  $\mathcal{O}$  des  $\mathbb{R}^n$  als gemeinsamem Definitionsbereich der  $g_i$ , so geben die Lösungen  $x \in \mathcal{O}$  der notwendigen Bedingungen

$$g_1(x) = c_1, \dots, g_l(x) = c_l, \quad \text{und} \quad \nabla f(x), \nabla g_1(x), \dots, \nabla g_l(x) \text{ linear abhängig}$$

eine **vollständige Kandidatenliste für Extremstellen** von  $f$  auf  $S$  (vorausgesetzt  $f$  und die  $g_i$  haben stetige partielle Ableitungen). Wenn also  $f$  Maximumstellen oder Minimumstellen auf  $S$  hat, weil z.B.  $S$  kompakt ist, so kommen diese in der Liste vor.

(6) Unter Umständen kann man aber die ins Auge gefasste niederdimensionale Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$  nicht günstig mit einem einzigen Gleichungssystem beschreiben, sondern muss  $S$  in verschiedene Teile zerlegen, die in verschiedenen offenen Mengen des  $\mathbb{R}^n$  so wie in (5) durch Gleichungssysteme definiert werden mit Funktionen  $g_i$ , die von dem jeweils betrachteten Teil abhängen. Eine **zusammengesetzte vollständige Liste von Kandidaten** enthält dann alle Kandidaten für Extremstellen von  $f$  in den einzelnen Teilstücken von  $S$  und außerdem noch alle Punkte aus  $S$ , die in keinem der betrachteten Teilstücke liegen (sofern es solche Punkte gibt).

Ein Typisches Beispiel ist der Rand  $S = \partial Q$  eines Quaders  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  (mit  $a_j < b_j$  für alle  $j$ ). Dann ist  $S$  zerlegt in  $(n-1)$ -dimensionale Seiten von  $Q$ , die beschrieben werden durch eine Gleichung  $x_j = a_j$  oder  $x_j = b_j$  und strenge Ungleichungen  $a_i < x_i < b_i$  für die anderen Indizes  $i \neq j$  (welche eine offene Menge in  $\mathbb{R}^n$  definieren), in  $(n-2)$ -dimensionale Kanten beschrieben durch 2 Gleichungen  $x_j = a_j$  oder  $x_j = b_j$  und  $x_k = a_k$  oder  $x_k = b_k$  und Ungleichungen  $a_i < x_i < b_i$  für die von  $j$  und  $k$  verschiedenen Indizes  $i$ , in  $(n-3)$ -dimensionale Kanten beschrieben durch 3 Gleichungen und  $n-3$  Ungleichungen u.s.w. bis zu den 1-dimensionalen Kanten, die beschrieben werden durch  $a_i < x_i < b_i$  für einen Index  $i$  und Gleichungen  $x_j = a_j$  oder  $x_j = b_j$  für alle Indizes  $j \neq i$ . Die vollständige Kandidatenliste umfasst dann alle Kandidaten, die sich aus den notwendigen Bedingungen für Extremstellen von  $f$  auf den Seiten bzw. den Kanten der verschiedenen Dimensionen ergeben und außerdem die noch nicht berücksichtigten Eckpunkte des Quaders, in denen  $x_j = a_j$  oder  $x_j = b_j$  für alle  $j = 1 \dots n$  gilt. ■

Bevor wir Beispiele zur Extremstellenbestimmung bei Nebenbedingungen besprechen, erinnern wir noch an die Methode der Randparametrisierung, die sich völlig analog auf die Extremstellenbestimmung bei differenzierbaren Funktionen auf ganz beliebigen Optimierungsbereichen  $S$  im  $\mathbb{R}^n$  anwenden lässt:

**SATZ (notwendiges Kriterium für Extrema auf parametrisierten Mengen):**

*Hat  $f: \mathbb{R}^n \supset S \rightarrow \mathbb{R}$  eine lokale Extremstelle bzgl. des Optimierungsbereichs  $S$  im Punkt  $x_0 \in S$  und ist dort differenzierbar, so gilt für jede differenzierbare Parametrisierung  $h: \mathbb{R}^m \supset P \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$  mit  $h(\xi_0) = x_0$  für eine innere Stelle  $\xi_0$  des Parameterbereichs  $P$ :*

$$\frac{\partial(f \circ h)}{\partial \xi_k}(\xi_0) = 0 \quad \text{für } k = 1 \dots m.$$

**DISKUSSION: 1)** Ist der Parameterbereich  $P$  offen in  $\mathbb{R}^m$  und  $f$  überall differenzierbar auf  $h(P)$ , so findet man eine **vollständige Liste von Extremstellenkandidaten im parametrisierten Bereich**  $h(P) \subset S$ , durch Lösung von  $m$  Gleichungen (meistens wird  $m$  die Dimension der Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$  sein)

$$\frac{\partial(f \circ h)}{\partial \xi_k}(\xi_1, \dots, \xi_m) = 0 \quad (k = 1 \dots m) \quad \text{für } (\xi_1, \dots, \xi_m) \in P \subset \mathbb{R}^m$$

und Einsetzen der Lösungen  $\xi \in P$  in die Parametrisierung  $h$ .

- Die Extremstellenkandidaten im parametrisierten Bereich  $h(P) \subset S$  sind die Bilder  $x_0 = h(\xi_0)$  der kritischen Punkte  $\xi_0$  von  $f \circ h$  im offenen Parameterbereich  $P \subset \mathbb{R}^m$ .

Die Offenheit des Parameterbereichs ist dabei wesentlich. Ist  $\xi_0$  ein Randpunkt von  $P$  und hat  $f$  in  $x_0 = h(\xi_0)$  eine lokale Extremstelle bzgl.  $S \supset h(P)$ , so kann man nicht mehr mit Sicherheit sagen, dass  $\xi_0$  ein kritischer Punkt von  $f \circ h$  ist, aber immerhin noch, dass  $\xi_0$  eine lokale Randextremstelle der Funktion  $f \circ h$  auf  $P$  ist. Man könnte in einer solchen Situation also das notwendige Kriterium für Randextremstellen von  $f \circ h$  auf  $P$  anwenden und daraus eine notwendige Bedingung für  $\xi_0$  und für  $x_0 = h(\xi_0)$  herleiten — aber das wird zu kompliziert, um noch von praktischem Nutzen zu sein.

**2)** Oft wird man nicht den gesamten Optimierungsbereich  $S$  mit einer einzigen Parametrisierung erfassen können, sondern man hat verschiedene Teile  $h(P) \subset S$  mit verschiedenen Parametrisierungen  $h: P \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$  auf offenen Mengen (evtl. auch verschiedener)

Euklidischer Räume  $\mathbb{R}^m$  zu betrachten. Eine **zusammengesetzte vollständige Liste von Kandidaten** für Extremstellen von  $f$  auf  $S$  erhält man dann, indem man für jeden so parametrisierten Teil von  $S$  die Kandidatenliste erstellt und dann noch eventuelle Ausnahmepunkte in  $S$  hinzunimmt, die in keinem der parametrisierten Teilstücke liegen, oder in denen die Voraussetzungen des obigen Satzes nicht erfüllt sind.

(3) Natürlich kann man die Parametrisierungsmethode auch mit der Methode der Extrema bei Nebenbedingungen koppeln, d.h. für einige Teile von  $S$  die eine Methode anwenden und für andere Teile die andere Methode. Verschiedene Verfahren zur Aufstellung von vollständigen Kandidatenlisten für Extremstellen können dann durchaus zu unterschiedlichen Listen führen, aber alle derartigen Listen enthalten, wenn sie wirklich vollständig sind, die gesuchten Extremstellen — falls es welche gibt.

(4) Den letzten Vorbehalt darf man nicht vergessen: Vollständige Kandidatenlisten für Extremstellen von  $f$  auf  $S$  enthalten nur dann die gesuchten absoluten Minimum- bzw. Maximumstellen von  $f$  auf  $S$ , wenn diese auch existieren!

- *Die Existenz der gesuchten absoluten Extremstellen muss immer sichergestellt werden; sonst brauchen die Kandidaten mit dem größten und kleinsten Funktionswert keine absoluten Extremstellen zu sein!*

Und es ist, wie gesagt, der schlimmste Fehler, den man bei einer Extremstellenaufgabe machen kann, dass man einen Punkt zur absoluten Maximum- bzw. Minimumstelle deklariert, obwohl die zu optimierende Funktion noch größere bzw. noch kleinere Werte annimmt! Ist  $S$  kompakt, also abgeschlossen (z.B. durch Gleichungen und / oder schwache Ungleichungen mit stetigen Funktionen definiert) und beschränkt (in einer großen Kugel enthalten), so garantiert der Extremstellensatz aus 5.4 die Existenz von absoluten Minimum- und Maximumstellen (Stetigkeit der auf  $S$  zu optimierenden Funktion  $f$  unterstellt). Ist  $S$  nur abgeschlossen, aber unbeschränkt, so greift evtl. der Zusatz zum Extremstellensatz, der unter geeigneten Bedingungen an  $f(x)$  bei  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $x \in S$ , immer noch die Existenz einer Minimum- oder Maximumstelle von  $f$  auf  $S$  garantiert. ■

**BEISPIELE (*Extremstellenbestimmung bei Nebenbedingungen*):**

$$(1) \quad f(x, y) = y - 2x \rightsquigarrow \text{opt.} \quad \text{auf der Kurve } S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}.$$

Es handelt sich hier um die Aufgabe, die lineare Funktion  $f$  auf der Normalparabel  $S$  in  $\mathbb{R}^2$  zu minimieren bzw. maximieren. Graphisch kann man dieses Problem lösen, wie früher bei den Beispielen zu Extremstellen am Rand erklärt, indem man die Geraden mit der Steigung 2 (das ist die Steigung der Niveaugraden von  $f$ ) parallel in Richtung des Koeffizientenvektors  $(-2, 1)$  (also in Richtung am stärksten zunehmender Werte von  $f$ ) verschiebt, bis sie die Parabel zum ersten Mal bzw. zum letzten Mal berührt.

Offenbar hat die Funktion  $f$  hier kein Maximum auf  $S$ , weil  $f(x, y) = f(x, x^2) = x^2 - 2x$  beliebig groß wird für  $(x, y) \in S$  bei  $|x| \rightarrow \infty$ . Diese Beobachtung zeigt (mit dem Zusatz zum Extremstellensatz 5.4) gleichzeitig, dass  $f$  ein absolutes Minimum auf  $S$  annimmt; denn die Kurve  $S$  ist eine abgeschlossene Menge in  $\mathbb{R}^2$ , da durch eine Gleichung  $g(x, y) = y - x^2 = 0$  mit stetiger Funktion  $g$  definiert. Die notwendige Bedingung für Extremstellen von  $f$  auf  $S$  lautet:

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{linear abhängig,}$$

was nur von  $x = 1$ ,  $y = 1$  erfüllt wird. Also ist  $(1, 1)$  die eindeutige absolute Minimumstelle von  $f$  auf der Parabel  $S$  und  $f(1, 1) = -1$  das Minimum.

Eine naheliegende Parametrisierung der Normalparabel  $S$  ist die Graphenabbildung  $h(x) = (x, x^2)$  auf dem Parameterbereich  $P = \mathbb{R}$ . Dann hat  $f \circ h(x) = x^2 - 2x$  einen einzigen kritischen Punkt  $x = 1$  in  $\mathbb{R}$ , also liefert auch die Parametrisierungsmethode den einzigen Kandidaten  $h(1) = (1, 1)$  für Extremstellen von  $f$  auf  $S$ , und der muss die Minimumstelle sein, weil das Minimum angenommen wird. Die Parametrisierungsmethode ist bei der Optimierung auf niederdimensionalen Bereichen wie hier meistens einfacher, weil die Funktion  $f \circ h$  dann von weniger Variablen abhängt als die Funktion  $f$ . Es kann aber ein Problem sein, brauchbare Parametrisierungen zu finden.

(2)  $f(x, y) = y - 2x \rightsquigarrow \text{opt.}$  auf der Kurve  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4x^2 = 1, y > 0\}$ .

Der Optimierungsbereich  $H$  ist hier der obere Ast einer zur vertikalen Achse symmetrischen Hyperbel mit der Gleichung  $g(x, y) = -4x^2 + y^2 = 1$ , und die notwendige Bedingung für Extremstellen von  $f$  auf  $H$  lautet jetzt

$$y^2 - 4x^2 = 1, y > 0 \quad \text{und} \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} -8x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{linear abhängig.}$$

Die lineare Abhängigkeit der Gradienten besteht genau, wenn  $y = 2x$  ist, dann aber ist  $y^2 - 4x^2 = 0$  und die Nebenbedingung nicht erfüllt. Also gibt es hier keine Kandidaten für Extremstellen von  $f$  auf  $H$  und daher auch keine Extremstellen (weil das Verfahren ja eine *vollständige* Kandidatenliste liefert).

Dass  $f$  kein Maximum auf dem Hyperbelast  $H$  annimmt, kann man von vorneherein daran sehen, dass  $f(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2} + 2|x| \rightarrow \infty$  geht bei  $0 > x \rightarrow -\infty$ ,  $(x, y) \in H$ . Andererseits ist zwar  $f(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2} - 2x > 0$  auf  $H$  von unten durch 0 beschränkt, nimmt aber bei  $x \rightarrow \infty$  beliebig kleine positive Werte an, ohne den Wert 0 je zu erreichen; deshalb hat  $f$  auch kein Minimum auf  $H$ . Geometrisch kann man das verstehen, indem man bemerkt, dass die Niveaugerade  $y - 2x = 0$  von  $f$  eine Asymptote des Hyperbelastes ist. Verschiebt man Geraden parallel zur Asymptote, bis sie den Hyperbelast treffen, so gibt es keine Lage mit einem ersten Berührungspunkt, sondern nur eine Grenzlage (die Asymptote), derart dass die Gerade in dieser Grenzlage den Hyperbelast gerade noch nicht schneidet aber bei jeder weiteren Verschiebung einen Schnittpunkt mit ihm hat. (Der Berührungspunkt der Asymptote mit dem Hyperbelast liegt gewissermaßen im Unendlichen.)

(3) *Abstandsaufgaben* kann man oft als Minimierungsproblem für das Abstandskadrat  $f(x) = |x - \mathbf{b}|^2$  zu einem festen Punkt  $\mathbf{b}$  auf einem Optimierungsbereich in  $\mathbb{R}^n$  formulieren. (Mit dem Quadrat des Abstands  $(x_1 - b_1)^2 + \dots + (x_n - b_n)^2$  lässt sich besser rechnen als mit dem Abstand  $|x - b|$  selbst.) Zum Beispiel findet man den nächsten Punkt zu  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  auf der Geraden  $G$  in  $\mathbb{R}^2$  mit der Gleichung  $\mathbf{a} \cdot x = a_1x_1 + a_2x_2 = c$  durch Minimieren von  $f(x) = |x - \mathbf{b}|^2$  unter der Nebenbedingung  $g(x) = a_1x_1 + a_2x_2 = c$ . Die notwendige Bedingung für Extremstellen bei diesem Problem ist

$$\mathbf{a} \cdot x = c \quad \text{und} \quad \nabla f(x) = 2(x - \mathbf{b}), \quad \nabla g(x) = \mathbf{a} \quad \text{linear abhängig.}$$

Die lineare Abhängigkeit der Gradienten gibt  $x = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\lambda\mathbf{a}$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  und aus der Nebenbedingung kann man dann (wenn  $\mathbf{a} \neq 0$  ist)  $\lambda$  eindeutig berechnen durch  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{2}\lambda|\mathbf{a}|^2 = c$ , also  $\lambda = \frac{2}{|\mathbf{a}|^2}(c - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ . Mit dem Zusatz zum Extremalsatz überlegt man, dass  $f$  auf der Geraden  $G$  ein Minimum annimmt (aber natürlich kein Maximum, da  $f$  auf  $G$  beliebig große Werte hat), also ist  $x = \mathbf{b} + \frac{c - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$  die eindeutige Minimumstelle von  $f$  auf  $G$  und damit der nächste Punkt zu  $\mathbf{b}$  in der Geraden. Das ist natürlich nichts anderes als der *Lotfußpunkt*  $x \in G$  des Lotes von  $\mathbf{b}$  auf die Gerade  $G$ , der dadurch gekennzeichnet ist, dass  $\mathbf{b} - x$  orthogonal zur Richtung der Geraden ist, also ein Vielfaches des Koeffizientenvektors  $\mathbf{a}$  (siehe 3.5).

Allgemeiner kann man so den *Abstand eines Punktes zu einer Kurve* bestimmen, indem man den Abstand des Punktes  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  zu den Punkten einer Kurve  $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = c\}$  minimiert. Die notwendige Bedingung für (lokale) Abstandsextrema lautet dann

$$g(x) = c \quad \text{und} \quad x - \mathbf{b}, \nabla g(x) \quad \text{linear abhängig,}$$

und lässt sich geometrisch interpretieren: Die kürzesten Verbindungsstrecken (und auch die längsten, wenn es solche gibt) von einem gegebenem Punkt zu einer Kurve in  $\mathbb{R}^2$  sind in ihrem Endpunkt orthogonal zu der Kurve.

Den *Abstand zwischen zwei Kurven*  $S_1, S_2$ , beschrieben durch  $g_1(x) = c_1$  und  $g_2(x) = c_2$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , kann man folgendermaßen bestimmen: Man betrachtet die Funktion  $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = |x - y|^2$  von vier Variablen unter den Nebenbedingungen  $\tilde{g}_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = g_1(x_1, x_2) = c_1$  und  $\tilde{g}_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = g_2(y_1, y_2) = c_2$ ; denn die Minimumstellen von  $f$  bei diesen Nebenbedingungen sind gerade die Paare  $(x, y) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$  von Punkten  $x \in S_1$  und  $y \in S_2$  mit einem minimalem Abstand zueinander. (Es muss allerdings keine solchen Punktepaare geben, wie der Hyperbelast und seine Asymptote in (2) demonstrieren.) Der Satz über Extremstellen bei Nebenbedingungen liefert nun wegen  $\nabla f(x, y) = 2(x_1 - y_1, x_2 - y_2, y_1 - x_1, y_2 - x_2)$  und  $\nabla \tilde{g}_1(x, y) = (\nabla g_1(x), 0, 0)$ ,  $\nabla \tilde{g}_2(x, y) = (0, 0, \nabla g_2(y))$  die folgenden notwendigen Bedingungen für lokale Extremstellen  $(x, y)$ :

$$g_1(x_1, x_2) = c_1, \quad g_2(y_1, y_2) = c_2,$$

$$(x_1 - y_1, x_2 - y_2, y_1 - x_1, y_2 - x_2), \quad (\nabla g_1(x), 0, 0), \quad (0, 0, \nabla g_2(y)) \quad \text{linear abhängig.}$$

Wenn die Gradienten von  $g_1$  und  $g_2$  auf den jeweiligen Kurven nicht verschwinden, so bedeutet dies, dass Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  existieren mit

$$g_1(x) = c_1, \quad g_2(y) = c_2, \quad x - y = \lambda_1 \nabla g_1(x) = \lambda_2 \nabla g_2(y).$$

Damit kann man die Kandidatenpaare  $(x, y)$  für Punkte  $x \in S_1, y \in S_2$  mit extremalem Abstand zueinander berechnen. Falls es Punkte  $x \in S_1, y \in S_2$  mit kleinstem Abstand zueinander gibt, was man mit dem Extremstellensatz z.B. einsehen kann, wenn eine der Kurven kompakt ist, so findet man dann die Paare kleinsten Abstands aus der Kandidatenliste durch Vergleich der Werte  $f(x, y) = |x - y|^2$ . Geometrisch bedeutet die notwendige Bedingung, dass eine kürzeste Verbindungsstrecke  $[x, y]$  zwischen den Kurven im Endpunkt  $x \in S_1$  orthogonal zur ersten Kurve  $S_1$  ist und im anderen Endpunkt  $y \in S_2$  orthogonal zur zweiten Kurve  $S_2$ . Das gilt natürlich auch für längste Verbindungsstrecken zwischen den Kurven, die existieren, wenn beide Kurven kompakt sind.

Ganz analog kann man mit den notwendigen Bedingungen für Extrema bei Nebenbedingungen Abstandsprobleme im 3-dimensionalen Raum oder in  $\mathbb{R}^n$  mit  $n > 3$  lösen, also z.B. den kleinsten Abstand eines Punktes zu einer Fläche oder Kurve in  $\mathbb{R}^3$  bestimmen, oder den kleinsten Abstand von einer Kurve zu einer Fläche oder zu einer zweiten Kurve in  $\mathbb{R}^3$  oder den kleinsten Abstand zwischen zwei Flächen (und im  $\mathbb{R}^n$  ganz allgemein den kleinsten Abstand zwischen zwei linearen oder nichtlinearen “Untermannigfaltigkeiten” von beliebiger Dimension). Derartige Problemstellungen können auch ökonomisch relevant sein, wenn man z.B. eine vektorielle ökonomische Variable  $x \in \mathbb{R}^n$  gerne auf einen Wert  $x_0$  einstellen würde, dies aber wegen vorliegender Restriktionen  $x \in S \subset \mathbb{R}^n$  (mit  $x_0 \notin S$ ) nicht kann; in einer solchen Situation ist die Wahl des zu  $x_0$  nächsten Punktes  $x \in S$  unter Umständen vernünftig.

(4) Wir betrachten eine homogen quadratische Funktion auf  $\mathbb{R}^n$ ,

$$f(x) = x \cdot Ax = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

mit symmetrischer Koeffizientenmatrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und bestimmen die Extremstellen auf der Einheitssphäre  $\mathbb{S}^{n-1} = S_1(0)$ , die beschrieben wird durch die Gleichung  $g(x) = |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Da  $\mathbb{S}^{n-1}$  kompakt ist, existieren darauf jedenfalls Minimum- und Maximumstellen von  $f$ . Die notwendigen Bedingungen für solche Stellen lauten:

$$|x|^2 = 1, \quad \text{und} \quad \nabla f(x) = 2Ax, \quad \nabla g(x) = 2x \quad \text{linear abhängig.}$$

Dies bedeutet, dass  $\lambda \in \mathbb{R}$  existiert mit

$$Ax = \lambda x, \quad |x| = 1,$$

d.h.  $x$  ist ein normierter (Länge 1) Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Da dann  $f(x) = x \cdot Ax = \lambda|x|^2 = \lambda$  ist, folgt:

- *Das Maximum der quadratischen Form  $x \cdot Ax$  auf der Einheitssphäre ist der größte und das Minimum ist der kleinste Eigenwert der symmetrischen Matrix  $A$ ;*
- *die entsprechenden Extremstellen in der Einheitssphäre sind die zugehörigen normierten Eigenvektoren.*

Sind nun bereit orthonormale Eigenvektoren  $u_1, \dots, u_k$  von  $A$  zu Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  gefunden, so minimieren wir  $f(x) = x \cdot Ax$  bei den Nebenbedingungen  $|x|^2 = 1$ ,  $u_1 \cdot x = 0, \dots, u_k \cdot x = 0$ . Diese Bedingungen beschreiben die Einheitssphäre in einem Unterraum der Dimension  $n-k$  und jedenfalls eine kompakte Menge in  $\mathbb{R}^n$  auf der  $f$  Extremwerte annimmt. (Natürlich nehmen wir  $k < n$  an, sonst sind die Nebenbedingungen nicht konsistent.) In einer Extremstelle  $x$  von  $f$  bei diesen Nebenbedingungen sind

$$2Ax, 2x, u_1, \dots, u_k \quad \text{linear abhängig,}$$

also gilt mit gewissen  $\mu_0, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$

$$Ax = \mu_0 x + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k,$$

weil die Vektoren  $x, u_1, \dots, u_k$  orthonormal, also linear unabhängig sind (siehe 3.5). Bildet man das Skalarprodukt  $u_j \cdot Ax$  und berücksichtigt  $u_j \cdot Ax = (Au_j) \cdot x = \lambda_j u_j \cdot x = 0$  wegen der Symmetrie von  $A$ , der Eigenwertgleichung  $Au_j = \lambda_j u_j$  und der Nebenbedingung  $u_j \cdot x = 0$ , so erhält man  $\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$ , also  $Ax = \mu_0 x$ . Somit ist wieder  $x$  ein normierter Eigenvektor von  $A$ , und zwar einer der zu den bereits vorliegenden Eigenvektoren  $u_1, \dots, u_k$  orthogonal ist (wenn  $k < n$ ).

Nun ist klar, dass man das Verfahren fortsetzen kann, indem man  $u_{k+1} = x$  als nächsten Eigenvektor wählt, und letztlich zu einer Orthonormalbasis von Eigenvektoren zu  $A$  gelangt. Das ist der (in 3.5 algebraisch bewiesene) **Satz von der Hauptachsentransformation**:

- *Zu jeder symmetrischen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt es eine Orthonormalbasis  $u_1, \dots, u_n$  von  $\mathbb{R}^n$  aus Eigenvektoren von  $A$  zu reellen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .*

Das sind dann auch sämtliche (mit Vielfachheit aufgezählte) Eigenwerte der Matrix. Bzgl. der Basis  $u_1, \dots, u_n$  wird die mit  $A$  definierte lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  in sich durch die Diagonalmatrix mit Einträgen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  dargestellt, und die quadratische Form hat die Darstellung als Linearkombination von "reinen Quadraten", d.h. von Quadraten homogener linearer Funktionen  $x \cdot u_j$  von  $x$ :

$$x \cdot Ax = \lambda_1(x \cdot u_1)^2 + \dots + \lambda_n(x \cdot u_n)^2.$$



(5) Wir betrachten eine differenzierbare Funktion auf einer  $(n-k)$ -dimensionalen "Seite" (oder "Kante") eines Quaders  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ . Eine solche Kante wird beschrieben durch  $k$  Gleichungen  $x_j = c_j$  (mit  $c_j = a_j$  oder  $= b_j$ ) für gewisse Indizes  $j = j_1, \dots, j_k$  und die Ungleichungen  $a_i < x_i < b_i$  für die anderen Indizes  $i$ . Hat  $f$  eine lokale Extremstelle auf einer solchen Kante, so gelten die notwendigen Bedingungen

$$x_j = c_j \quad \text{für } j = j_1, \dots, j_k, \quad (a_i < x_i < b_i \quad \text{für } i \notin \{j_1, \dots, j_k\}),$$

$$\nabla f(x), e_{j_1}, \dots, e_{j_k} \quad \text{linear abhängig,}$$

also

$$x_j = c_j \quad \text{für } j = j_1, \dots, j_k, \quad (a_i < x_i < b_i \quad \text{für } i \notin \{j_1, \dots, j_k\}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \quad \text{für alle } i \notin \{j_1, \dots, j_k\}.$$

Dieselben Kandidaten für Extremstellen auf der Kante erhält man auch, indem man die Kante durch die Variablen  $a_i < x_i < b_i$  zu  $i \notin \{j_1, \dots, j_k\}$  parametrisiert, d.h.  $f$  nur noch als Funktion von diesen Variablen auffasst (bei fixierten Variablen  $x_j = c_j$ ,  $j = j_1, \dots, j_k$ ). Der Rand von  $Q$  ist die Vereinigung aller Seiten der Dimensionen  $n - k = 1 \dots n-1$  und der Ecken (für die alle Komponenten  $x_j$  auf den Wert  $a_j$  oder  $b_j$  gesetzt sind). Eine vollständige Liste von Kandidaten für lokale Extremstellen der differenzierbaren Funktion  $f$  auf dem Rand  $\partial Q$  des Quaders erhält man, indem man die Kandidaten in all diesen Kanten sammelt und die Ecken hinzunimmt. ■

**BEISPIELE (Ökonomische Anwendungen der Extrema bei Nebenbedingungen):**

**(1) Gewinn-Optimaler Faktoreinsatz bei Produktion mit Kapazitätsgrenzen:**

Wir studieren mit dem Kriterium für Extrema bei Nebenbedingungen die Gewinnfunktion

$$G(r) = px(r) - K(r) = pcx_1^{s_1} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n} - k_1x_1 - \dots - k_nx_n - k_0$$

zu einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion bei konstantem Marktpreis und linearer Kostenfunktion (alle Parameter  $p, c, s_1, \dots, s_n, k_1, \dots, k_n > 0$  und  $k_0 \geq 0$ ). Sind Kapazitätsgrenzen  $c_j > 0$  für alle Faktoreinsatzmengen  $r_j$  gegeben, so ist der Optimierungsbereich der Quader  $Q = [0, c_1] \times \dots \times [0, c_n]$ . Ist  $r_j = 0$  für mindestens ein  $j$ , so gilt  $G(r) = -k_1r_1 - \dots - k_nx_n - k_0 \leq -k_0 = G(0)$  mit Gleichheit nur für  $r = 0$ . Falls also  $G$  überhaupt irgendwo auf  $Q$  größere Werte als  $-k_0$  hat, so kann das nur im Inneren von  $Q$  geschehen oder auf einer Seite (Kante) von  $\partial Q$ , die beschrieben wird durch  $x_j = c_j$  für einige Indizes  $j = j_1, \dots, j_k$ ,  $0 < x_i < c_i$  für alle anderen Indizes  $i$ . Für eine innere Maximumstelle  $r$  ist die notwendige Bedingung

$$0 < r_i < c_i \quad \text{und} \quad 0 = \frac{\partial G}{\partial r_i}(r) = px(r) \frac{s_i}{r_i} - k_i \quad \text{für } i = 1 \dots n,$$

und für eine Extremstelle auf einer Seite lautet sie

$$r_j = c_j \quad \text{für } j = j_1, \dots, j_k, \quad 0 < r_i < c_i \quad \text{für } i \notin \{j_1, \dots, j_k\},$$

$$0 = \frac{\partial G}{\partial r_i}(r) = px(r) \frac{s_i}{r_i} - k_i \quad \text{für } i \notin \{j_1, \dots, j_k\}.$$

Diese Gleichungen kann man eindeutig nach  $r$  auflösen, indem man  $r_j = c_j$  für  $j = j_1, \dots, j_k$  und  $r_i = ts_i/k_i$  für die anderen Indizes  $i$  ansetzt und dann  $t$  aus einer Gleichung  $k_i = px(r)s_i/r_i = pt^{\sigma-1}x(r(1))k_i$  mit  $i \notin \{j_1, \dots, j_k\}$  bestimmt. (Dabei haben wir  $\sigma = \sum_i s_i = s - s_{j_1} - \dots - s_{j_k}$  mit  $s = s_1 + \dots + s_n$  abgekürzt und  $r(t)$  für den Vektor geschrieben, der sich aus dem Ansatz mit dem Parameter  $t > 0$  ergibt.) Jedenfalls geht das, wenn  $\sigma \neq 1$  ist; andernfalls ist entweder  $px(r(1)) = 1$  und alle Vektoren  $r(t)$  sind Lösungen, oder es ist  $px(r(1)) \neq 1$  und es gibt keine Lösungen.

Wenn nun  $s_1 + \dots + s_n < 1$  ist und daher  $g(r) > -k_0$  für  $0 \neq r \in Q$  nahe 0, so ergibt sich damit als *vollständige Kandidatenliste für Maximumstellen von  $G$  auf  $Q = [0, c_1] \times \dots \times [0, c_n]$*  die Menge der Faktoreinsatzvektoren  $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$  mit

$$r_j = c_j \text{ für } j \in J, \quad r_i = \left[ \left( p c \prod_{j \in J} c_j^{s_j} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \prod_{h \notin J} \left( \frac{s_h}{k_h} \right)^{\frac{s_h}{1-\sigma}} \right] \frac{s_i}{k_i} < c_i \text{ für } i \notin J,$$

wobei  $J$  Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$  ist und  $\sigma = \sum_{i \notin J} s_i$  abgekürzt wurde. (Für  $J = \emptyset$  ergibt sich ggf. die innere Maximumstelle, für  $J = \{1, \dots, n\}$  die Ecke  $r = (c_1, \dots, c_n)$ .)

Da  $Q$  kompakt ist, nimmt  $G$  in mindestens einem dieser Punkte ein Maximum an. Unter der Voraussetzung  $s_1 + \dots + s_n < 1$  ist nun  $G$  eine streng konkave Funktion auf jeder Strecke in  $\mathbb{R}_{>0}^n$  d.h. für alle  $r, \tilde{r} \in \mathbb{R}_{>0}^n$  ist  $[0, 1] \ni t \mapsto G(x + t(\tilde{x} - x))$  streng konkav. (Das bestätigt man durch Berechnung der zweiten Ableitung  $\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} G(r + tu) = -\sum_{i=1}^n s_i \left(\frac{u_i}{r_i}\right)^2 x(r) + \left(\sum_{i=1}^n \frac{s_i u_i}{r_i}\right)^2 x(r) < 0$  gemäß Cauchy–Schwarz–Ungleichung und  $\sum_{i=1}^n s_i < 1$ ; siehe 5.6.) Daher hat  $G$  auf jeder Strecke in  $Q$  höchstens eine Maximumstelle, und folglich *gibt es genau eine Maximumstelle  $r^*$  von  $G$  in  $Q$* . Eine ähnliche Argumentation zeigt, dass jeder Kandidat eindeutige Maximumstelle von  $f$  im Abschluss seiner Seite ist. (Das folgt aus der Konkavität und  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} G(r + tu) = 0$  für solche Kandidaten  $r$  und Richtungen  $u$  parallel zu seiner Seite.) Sind bei  $r^*$  Kapazitätsgrenzen  $r_j^* = c_j$  erreicht genau für  $j = j_1, \dots, j_k$ , so kann es folglich keinen Kandidaten geben, bei dem die Kapazitätsgrenzen nur für  $j = j_1, \dots, j_{h-1}, j_{h+1}, \dots, j_k$ , aber nicht für  $j_h$  erreicht sind; denn solch ein Kandidat würde das Maximum von  $G$  in einer größeren abgeschlossenen Seite liefern, also einen größeren Wert  $G(r)$  als  $G(r^*)$ . Dies bedeutet, *dass jeder nichtoptimale Faktoreinsatzkandidat eine Kapazitätsgrenze erreichen muss, die  $r^*$  nicht erreicht* und dass man in der Kandidatenliste für die Maximumstellen von  $G$  auf  $Q$  alle Faktoreinsatzvektoren  $r$  streichen kann, welche dieselben Kapazitätsgrenzen erreichen wie ein anderer Kandidat in der Liste und außerdem noch eine weitere Kapazitätsgrenze.

Für den optimalen Vektor  $r^*$ , der die Kapazitätsgrenzen  $r_j^* = c_j$  genau für  $j = j_1, \dots, j_k$  erreicht, hat man die Darstellung von  $\nabla G(r^*)$  mit Lagrange–Multiplikatoren

$$\nabla G(r^*) = \lambda_1 e_{j_1} + \dots + \lambda_k e_{j_k}$$

weil ja  $\frac{\partial G}{\partial r_i}(r^*) = 0$  ist für  $i \notin \{j_1, \dots, j_k\}$ . *Ökonomische Interpretation der Lagrange–Multiplikatoren:*  $\lambda_h$  gibt an, um wieviele Einheiten sich der Gewinn näherungsweise erhöht, wenn man die Kapazitätsbeschränkung  $r_{j_h} \leq c_{j_h}$  aufhebt und  $r_{j_h}^* = c_{j_h}$  um eine Einheit erhöht (bei c.p.–Bedingung). Man erkennt daran, dass alle  $\lambda_h$  nichtnegativ sind, und hat zu unterscheiden zwischen *effektiv wirksamen Kapazitätsbeschränkungen*  $r_{j_h}^* = c_{j_h}$  mit  $\lambda_h > 0$  und den *“zufällig” erreichten Kapazitätsgrenzen*  $r_{j_j}^* = c_{j_h}$  mit  $\lambda_h = 0$ . Bei Aufhebung effektiv wirksamer Kapazitätsgrenzen erhöht sich der Gewinn von erster Ordnung, bei Aufhebung *“zufällig”* erreichter Kapazitätsgrenzen dagegen nicht (jedenfalls nicht von erster Ordnung, wegen der oben bemerkten strengen Konkavität der Gewinnfunktion nimmt er aber sogar ab). Zum Beispiel ist eine Kapazitätsgrenze *“zufällig”* erreicht, wenn  $r^*$  die absolute Maximumstelle von  $G$  auf  $\mathbb{R}_{>0}^n$  ist und die Kapazitätsgrenze  $c_j = r_j^*$  gerade auf den Wert der entsprechenden Komponente von  $r^*$  gesetzt wurde. Wir bemerken noch, was schon früher festgestellt wurde, dass aus  $0 = \frac{\partial G}{\partial r_i}(r^*) = p x(r^*) s_i / r_i^* - k_i$  für die Indizes  $i$ , für die  $r_i^*$  die Kapazitätsgrenze gar nicht oder nicht effektiv wirksam erreicht, die Relation  $\frac{r_h}{r_i} = \frac{s_h}{s_i} / \frac{k_h}{k_i}$  für Paare solcher Indizes folgt. *Bei optimalem Faktoreinsatz hängt also das Faktoreinsatzverhältnis für Faktoren, bei denen keine Kapazitätsrestriktion effektiv wirksam ist, nur ab vom Verhältnis der Parameter in der Produktionsfunktion und in der linearen Kostenfunktion.*

Die ganze Diskussion lässt sich analog durchführen, wenn *nur für einige Faktoren Kapazitätsrestriktionen bestehen*. Allerdings ist der (abgeschlossene) Optimierungsbereich  $D$  dann nicht mehr kompakt (die Produktionsfaktoren ohne Restriktionen können ja beliebig groß werden), so dass die Existenz einer Maximumstelle der Gewinnfunktion dann nicht mehr gesichert ist. Im Fall  $s_1 + \dots + s_n < 1$  haben wir aber schon überlegt, dass  $G(r) \rightarrow -\infty$  gilt bei  $|r| \rightarrow \infty$ ,  $r \in D$ , also ist die Existenz einer Maximumstelle  $r^*$  dann sicher, und ihre Eindeutigkeit ergibt sich mit derselben Argumentation wie oben. Für diesen optimalen Faktoreinsatzvektor erreichen die Komponenten  $r_j^*$  dann für einige (oder keine) Indizes  $j = j_1, \dots, j_k$  eine gesetzte Kapazitätsgrenze  $c_j$ , und  $\frac{\partial G}{\partial r_i}(r^*) = 0$  gilt für die anderen Indizes  $i$ , insbesondere auch für die Indizes, für die keine Kapazitätsgrenze angesetzt wurde, und zusätzlich auch noch für die Indizes  $i \in \{j_1, \dots, j_k\}$ , bei denen  $r_i^*$  die Kapazitätsgrenze erreicht, ohne dass diese effektiv wirksam ist. Alle oben gemachten Aussagen über den optimalen Faktoreinsatzvektor gelten analog in dieser allgemeineren Situation, wo nicht für alle Produktionsfaktoren eine beschränkte Kapazität angenommen wird.

## (2) Kosten-minimaler Faktoreinsatz bei gegebenem Produktionsniveau:

Hier sind eine Produktionsfunktion  $x(r)$  und eine Kostenfunktion  $K(r)$  abhängig vom Faktoreinsatzvektor  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  gegeben, und gesucht sind für ein gegebenes Output-Niveau  $X$  die Vektoren  $r$  mit  $x(\tilde{r}) = X$  und minimalen Kosten  $K(r)$ . (Man kann sich  $X$  zum Beispiel als die maximale am Markt absetzbare Menge oder als die maximale überhaupt produzierbare Menge des Produkts vorstellen.) Diese Kosten-minimalen Faktoreinsatzvektoren heißen **Minimalkostenkombination**.

Über die Produktionsfunktion und die Kostenfunktion machen wir zunächst folgende ökonomisch sinnvolle Annahmen:  $x(r) > 0$  für  $r \in \mathbb{R}_{> 0}^n$ ,  $x(r) = 0$  wenn  $r_j = 0$  für ein  $j$ ,  $x(tr)$  ist für  $r \in \mathbb{R}_{> 0}^n$  streng wachsend in  $t \in \mathbb{R}_{> 0}$  mit  $\frac{d}{dt}x(tr) > 0$ ,  $K(r) > k_0 = K(0)$  für  $0 \neq r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ ,  $K(r) \rightarrow \infty$  bei  $|r| \rightarrow \infty$  ( $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ ),  $K(tr)$  ist für  $0 \neq r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  streng wachsend bzgl.  $t \in \mathbb{R}_{> 0}$ . Beispiele sind Produktionsfunktionen vom Cobb-Douglas-Typ  $x(r) = c x_1^{s_1} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n}$  mit  $c > 0$ ,  $s_1, \dots, s_n > 0$  und lineare Kostenfunktionen  $K(r) = k_1 r_1 + \dots + k_n r_n + k_0$  mit  $k_0 \geq 0$ ,  $k_1, \dots, k_n > 0$ . Diese Funktionen hängen sogar von jedem einzelnen Produktionsfaktor streng wachsend ab auf  $\mathbb{R}_{> 0}^n$  (was auch eine natürliche Voraussetzung für allgemeine Produktions- und Kostenfunktionen wäre).

Es gilt nun folgendes ökonomische Prinzip:

- *Minimiert der Faktoreinsatzvektor die Gesamtkosten zu einem gegebenen Produktionsniveau, so maximiert derselbe Faktoreinsatz auch den Produktions-Output bei gegebenen Gesamtkosten — und umgekehrt.*

Beide Optimierungsprobleme führen also auf dieselben Lösungen, die Minimalkostenkombinationen. Zum Beweis betrachten wir eine Minimumstelle  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  für  $K$  bei Produktionsniveau  $X$  und betrachten Vergleichsvektoren  $\tilde{r} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  mit  $K(\tilde{r}) = K(r)$ . Wäre nun  $x(\tilde{r}) > X$ , so wäre  $\tilde{r} \in \mathbb{R}_{> 0}^n$  (sonst  $x(\tilde{r}) = 0$ ) und es gäbe  $0 < t < 1$  mit  $x(t\tilde{r}) = X$  sowie  $K(t\tilde{r}) < K(\tilde{r}) = K(r)$  wegen der vorausgesetzten Monotonie-Eigenschaft von  $K$ . Das ist aber ein Widerspruch zur vorausgesetzten Kosten-Minimalität von  $r$ . Analog sieht man für Output-maximale  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  bei gegebenen Gesamtkosten  $K(r) = \kappa$  und Vergleichsvektoren  $\tilde{r} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  mit  $x(\tilde{r}) = x(r)$ , dass  $K(\tilde{r}) \geq \kappa$  gilt. Das ist nämlich klar im Fall  $\kappa = k_0$  und im Fall  $\kappa > k_0$ ,  $K(\tilde{r}) < \kappa$  wäre  $r \in \mathbb{R}_{> 0}^n$  und es gäbe  $t > 1$  mit  $K(t\tilde{r}) = \kappa$ , woraus der Widerspruch  $x(t\tilde{r}) > x(\tilde{r}) = x(r)$  zur Output-Maximalität von  $r$  folgte.

Unter den getroffenen Voraussetzungen *exisziert zu jedem erreichbaren Produktionsniveau*  $X \geq 0$ , (mindestens) *eine Minimalkostenkombination*. Wegen  $K(r) \rightarrow \infty$  bei  $|r| \rightarrow \infty$  ( $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ ) nimmt nämlich  $K$  auf der abgeschlossenen Menge  $S_X = \{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : x(r) = X\}$  ein Minimum an, sofern das Produktionsniveau  $X$  erreichbar, diese Menge also nicht leer ist. Im Fall  $X > 0$  liegt jede Minimumstelle  $r$  automatisch in  $\mathbb{R}_{> 0}^n$  (da sonst  $x(r) = 0$ ). Ist die Produktionsfunktion streng konkav auf jeder Strecke in  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  (wie in der vorigen Nummer (1) für die Cobb-Douglas-Funktionen mit  $s_1 + \dots + s_n < 1$  gezeigt) und ist die Kostenfunktion  $K$  linear, so *ist die Minimalkostenkombination auch eindeutig*; denn für  $r, \tilde{r} \in S_X$  mit  $K(r) = K(\tilde{r}) = \kappa$  gilt dann wegen der strengen Konkavität  $x(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\tilde{r}) > \frac{1}{2}x(r) + \frac{1}{2}x(\tilde{r}) = X$  und  $K(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\tilde{r}) = \kappa$ , was bei minimalen Kosten  $\kappa$  nach dem oben formulierten Prinzip unmöglich ist. (Unten zeigen wir die Eindeutigkeit noch allgemeiner.)

Bei *notwendigen Bedingungen für Minimalkombinationen*  $r$ , also Minimumstellen von  $K$  unter der Nebenbedingung  $x(r) = X$ , lauten (im Fall  $X > 0$ ,  $S_X \neq \emptyset$ ):

$$x(r) = X \quad (r \in \mathbb{R}_{> 0}^n) \quad \text{und} \quad \nabla x(r), \nabla K(r) \quad \text{linear abhängig.}$$

Nehmen wir an, dass die Grenzkosten  $\frac{\partial K}{\partial r_j} \neq 0$  sind, was z.B. bei konstanten positiven Faktorpreisen  $k_j$  und  $K = k_1 r_1 + \dots + k_n r_n + k_0$  gegeben ist, so können wir diese lineare Abhängigkeit  $\nabla x(r) = \lambda \nabla K(r)$  auch so formulieren (da  $r \cdot \nabla x(r) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=1} x(tr) > 0$  vorausgesetzt ist, also  $\nabla x(r) \neq 0$  und damit  $\lambda \neq 0$  gilt):

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial r_i}(r)}{\frac{\partial x}{\partial r_j}(r)} = \frac{\frac{\partial K}{\partial r_i}(r)}{\frac{\partial K}{\partial r_j}(r)} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n.$$

- *Im Kostenminimum ist das Verhältnis der Grenzproduktivitäten identisch mit dem entsprechenden Grenzkostenverhältnis,*

also mit dem Verhältnis  $k_i/k_j$  bei konstanten Faktorpreisen. Schreibt man bei solchen konstanten Faktorpreisen die Bedingung in der Form

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial r_i}(r)}{k_i} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_j}(r)}{k_j} = \lambda,$$

so sieht man:

- *Im Kostenminimum ist für alle Produktionsfaktoren die Grenzproduktivität pro Faktorkostensatz gleich,*

also haben teurere Faktoren bei Kosten-minimierendem Einsatz höhere Grenzproduktivität als billigere Faktoren. Diese ökonomische Prinzip heißt auch **Ausgleich des Grenznutzens** oder **zweites Gossensches Gesetz**.

*Ökonomische Interpretation des Lagrange-Multiplikators*  $\lambda$ : Verändert man eine Minimalkostenkombination  $r$  um  $h\nabla x(r)$  in Richtung des stärksten Anstiegs  $s = |\nabla x(r)|$  der Produktionsfunktion, derart dass der Output  $X = x(r)$  um 1 zunimmt, also  $h = 1/s^2$ , so ergibt sich als Zuwachs der Kostenfunktion  $K(r + h\nabla x(r)) - K(r) \approx h\nabla x(r) \cdot \nabla K(r) = h\lambda |\nabla x(r)|^2 = \lambda$ . Nehmen wir an, dass für jedes Niveau  $X$  genau ein Kosten-minimaler Faktoreinsatzvektor  $r(X)$  existiert und von  $X$  differenzierbar abhängt, so ergibt sich aus  $\nabla K(r(X)) = \lambda(X)\nabla x(r(X))$  durch Bildung des Skalarprodukts mit  $\frac{d}{dX}r(X)$  und Anwendung der Kettenregel:  $\frac{d}{dX}K(r(X)) = \lambda(X)\frac{d}{dX}x(r(X)) = \lambda(X)\frac{d}{dX}X = \lambda(X)$ . Daher hat man folgende Interpretationen des Lagrange-Multiplikators:

- *Der Lagrange-Multiplikator gibt an, um wieviele Einheiten sich die Kosten erhöhen, wenn man das Produktionsniveau um eine Einheit in Richtung maximal zunehmenden Outputs bzw. unter Erhaltung der Kosten-optimalen Produktionsweise steigert.*

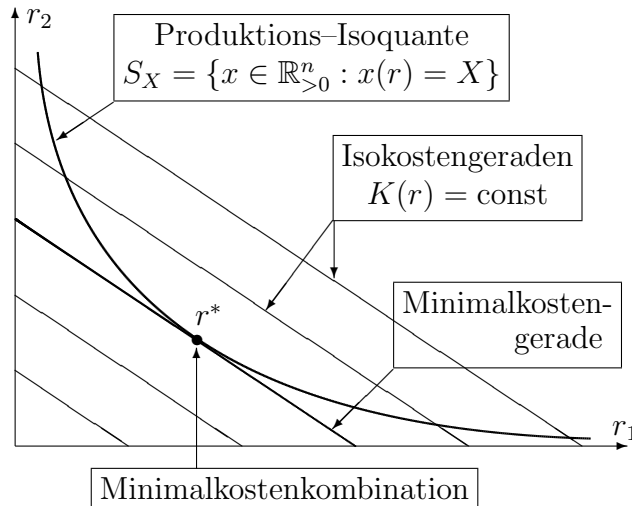
Die notwendigen Bedingungen liefern zunächst nur die Kandidaten für Minimalkostenkombinationen zum Niveau  $X$ , unter denen man die Minimalkostenkombinationen, also die wirklichen Minimumstellen von  $K$  im Minimierungsbereich  $S_X$ , durch Wertevergleich herausfinden muss. (Wir haben ja schon überlegt, dass Minimumstellen in  $S_X$  existieren.) Ohne weitere Annahmen kann es viele Kandidaten und auch mehrere Minimalkostenkombinationen geben. Es gilt aber:

- *Ist die Kostenfunktion  $K(r)$  linear und hat die Produktionsfunktion  $x(r)$  streng konvexe Superniveaumengen, so haben die notwendigen Bedingungen für Extremstellen von  $K(r)$  bei Produktionsniveau  $x(r) = X > 0$  nur eine Lösung,*
- *und diese ist dann die eindeutige Minimalkostenkombination  $r^*$  zum Niveau  $X$ .*

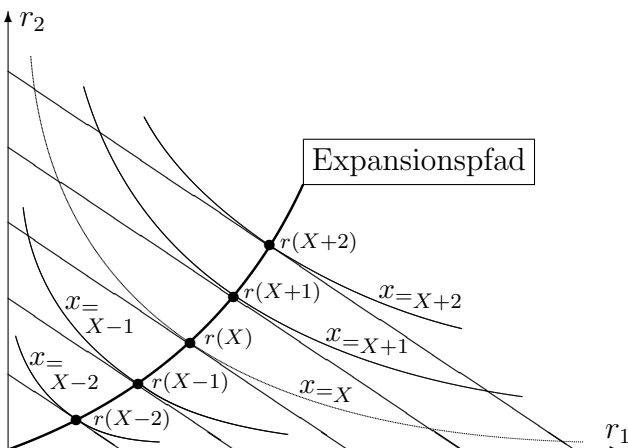
Die Bedingung streng konvexer Superniveaumengen bedeutet, dass aus  $x(r) \geq X$  und  $x(\tilde{r}) \geq X$  für alle  $0 < t < 1$  folgt  $x(r + t(\tilde{r} - r)) > X$ . Mit anderen Worten: Die Superniveaumenge  $\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : x(r) \geq X\}$  ist konvex, d.h. sie enthält mit je zwei verschiedenen Punkten  $r, \tilde{r}$  auch alle Punkte ihrer Verbindungsstrecke  $r + t(\tilde{r} - r)$ ,  $0 < t < 1$ , und in all diesen Punkten ist das Produktionsniveau echt größer als  $X$ . Man spricht dann auch von **streng konvexen Isoquanten** der Produktionsfunktion. Natürlich wird das nur für Niveaus  $X > 0$  gefordert; denn die Superniveaumenge zum Niveau  $X = 0$  ist  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ , und diese Menge ist konvex, aber nicht streng konvex. Ist die Produktionsfunktion streng konkav auf  $\mathbb{R}_{> 0}^n$ , wie z.B. eine Cobb–Douglas–Funktion im Fall einer Exponentensumme  $s_1 + \dots + s_n < 1$  (siehe (1) oben), so sind die Superniveaumengen streng konvex; denn dann gilt  $x((1-t)r + t\tilde{r}) > (1-t)x(r) + t\tilde{x} \geq (1-t)X + tX = X$ . Aber die strenge Konvexitätsbedingung an die Superniveaumengen ist schwächer als strenge Konkavität von  $x(r)$ . Bei einer Cobb–Douglas–Funktion  $x(r) = cr_1^{s_1} \cdot \dots \cdot r_n^{s_n}$  ist diese Bedingung z.B. bei beliebiger Exponentensumme  $s = s_1 + \dots + s_n$  erfüllt, während strenge Konkavität nur vorliegt, wenn  $s < 1$  ist. (Um das zu sehen, betrachtet man einfach  $x(r)^{1/2s}$  mit Exponentensumme  $\frac{1}{2}$ ; diese Funktion ist streng konkav und hat folglich streng konvexe Superniveaumengen; aber ihre Superniveaumenge zum Niveau  $X^{1/2s}$  ist dieselbe wie die von  $x(r)$  zum Niveau  $X$ .)

Um die obige Eindeutigkeitsaussage einzusehen, betrachten wir eine Lösung  $r \in \mathbb{R}_{> 0}^n$  der notwendigen Bedingungen  $x(r) = X > 0$ ,  $\nabla x(r) = \lambda \mathbf{k}$  mit dem Faktorkostensatzvektor  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ . Wir haben schon bemerkt, dass dann  $\nabla x(r) \neq 0$  und  $\lambda \neq 0$  gilt; wegen der Annahme  $0 < \frac{d}{dt} \Big|_{t=1} x(tr) = r \cdot \nabla x(r) = \lambda r \cdot \mathbf{k}$  und  $r \cdot \mathbf{k} = r_1 k_1 + \dots + r_n k_n > 0$  ist sogar  $\lambda > 0$ . Für alle  $\tilde{r} \in \mathbb{R}_{> 0}^n$  mit  $\tilde{r} \neq r$  und  $x(\tilde{r}) \geq X$  gilt nun nach Voraussetzung  $x((1-t)r + t\tilde{r}) > X = x(r)$  für  $0 < t < 1$  und daher  $0 \leq \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x(r + t(\tilde{r} - r)) = (\tilde{r} - r) \cdot \nabla x(r) = \lambda (\tilde{r} - r) \cdot \mathbf{k}$  mit Gleichheit höchstens für  $x(\tilde{r}) = X$  (sonst würde Ersetzung von  $\tilde{r}$  durch  $\hat{r} = \tilde{r} - \varepsilon \nabla x(r)$  mit  $\varepsilon > 0$  so klein, dass immer noch  $x(\hat{r}) > X$  ist, zum Widerspruch  $0 \leq (\hat{r} - r) \cdot \nabla x(r) = (\tilde{r} - r) \cdot \nabla x(r) - \varepsilon |\nabla x(r)|^2 = -\varepsilon |\nabla x(r)|^2 < 0$  führen). Ist nun auch  $\tilde{r}$  eine Lösung der notwendigen Bedingungen, so gilt auch  $\nabla x(\tilde{r}) = \tilde{\lambda} \mathbf{k}$  mit  $\tilde{\lambda} > 0$  und  $0 \leq (r - \tilde{r}) \cdot \nabla x(\tilde{r}) = \tilde{\lambda} (r - \tilde{r}) \cdot \mathbf{k}$ , also folgt mit der vorher gezeigten umgekehrten Ungleichung sogar  $(r - \tilde{r}) \cdot \mathbf{k} = 0$  und für  $0 < t < 1$  und  $r_t = (1-t)r + t\tilde{r}$  auch  $(r_t - r) \cdot \mathbf{k} = (1-t)(r - \tilde{r}) \cdot \mathbf{k} = 0$ . Diese Gleichheit kann aber, wie bemerkt, nur eintreten, wenn  $x(r_t) = X$  ist, und das widerspricht der strengen Konvexität der Superniveaumengen. Damit ist die Einzigkeit des Kandidaten für eine Minimumstelle von  $K(r)$  bei Nebenbedingung  $x(r) = X$  gezeigt, und da wir schon überprüft haben, dass eine Minimumstelle auch existiert, kann diese nur der eindeutige Kandidat sein.

Wir illustrieren die Situation einer linearen Kostenfunktion und einer Produktionsfunktion mit streng konvexen Isoquanten im Fall  $n = 2$  von zwei Produktionsfaktoren (eventuelle weitere muss man sich dann konstant denken). Die Isoquanten der Kostenfunktion sind dann Geraden, genannt *Isokostengeraden* oder *Budgetgeraden*. Jedes Produktionsniveau  $X > 0$  definiert eine Isoquante  $S_X = \{r \in \mathbb{R}_{>0}^n : x(r) = X\}$  der Produktionsfunktion, und diese Produktions-Isoquante wird in genau einem Punkt von einer Isokostengeraden berührt; der Berührungspunkt  $r^* = (r_1^*, r_2^*)$  ist dann die zum Niveau  $X$  gehörende eindeutige Minimal-kostenkombination. Die Isokostengeraden  $k_1r_1 + k_2r_2 + k_0 = \text{const}$  haben Steigung  $-k_1/k_2$ , die *Minimalkosten*  $\kappa = K(r^*)$  ergeben sich aus der Gleichung  $k_1r_1 + k_2r_2 + k_0 = \kappa$  der Isokostengeraden, welche die Produktions-Isoquante  $S_X$  berührt. Deren Achsenabschnitt auf der  $r_2$ -Achse ist  $\frac{\kappa - k_0}{k_2}$ , also ist  $\kappa$  aus dem Achsenabschnitt dieser *Minimalkostengeraden* abzulesen.



Man kann die Lösung des Minimalkostenproblems graphisch vornehmen, indem man die Isokostengerade durch den Ursprung parallel verschiebt, bis sie die Produktions-Isoquante  $S_X$  berührt. Das ist das früher schon beschriebene Verfahren zur Extremwertbestimmung von linearen Funktionen. Zu Gesamtkosten  $\tilde{\kappa} < \kappa$  ist kein Faktoreinsatz zum Output-niveau  $X$  möglich (die Budgetgerade  $k_1r_1 + k_2r_2 + k_0 = \tilde{\kappa}$  schneidet die Isoquante  $S_X$  nicht), während es für Gesamtkosten  $\tilde{\kappa} > \kappa$  genau zwei Faktorkombinationen gibt, die zum Output  $X$  führen (die Isokostengerade  $k_1r_1 + k_2r_2 + k_0 = \tilde{\kappa}$  schneidet  $S_X$  in genau zwei Punkten, weil die Superniveaumenge oberhalb von  $S_X$  streng konvex ist).



Die Kurve  $\mathbb{R}_{>0} \ni X \mapsto r(X) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ , die jedem Produktionsniveau  $X$  seine zugehörige Minimalkostenkombination zuordnet, heißt die *Minimalkostenlinie* oder der *Expansionspfad*. Voraussetzung dieser Definition ist, dass für jedes  $X$  genau eine Minimalkostenkombination existiert; bei Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen ist das z.B. der Fall, wie wir gesehen haben. Aus den notwendigen Bedingungen für Kosten-Optimalität von  $r(X)$  ergeben sich nun

Gleichungen für den Expansionspfad:

$$x(r(X)) = X, \quad \frac{\partial x}{\partial r_i}(r(X)) = \frac{\partial K}{\partial r_i}(r(X)) \quad \left( = \frac{k_i}{k_j} \text{ bei linearen Kosten} \right)$$

für alle  $1 \leq i < j \leq n$ . Das sind  $\frac{1}{2}n(n+1)$  Gleichungen für die  $n$  Komponentenfunktionen von  $r(X)$ , die allerdings abhängig sind; es genügt, neben  $x(r(X)) = X$  die  $n-1$  Gleichungen zu betrachten, die sich z.B. für  $j = 1$  ergeben.

Wir rechnen nun für eine Produktionsfunktion  $x(r) = cr_1^{s_1} \cdot \dots \cdot r_n^{s_n}$  die Minimalkostenkombinationen  $r(X)$  und damit den Expansionspfad aus. Wegen  $\frac{\partial x}{\partial r_j}(r) = \frac{s_j}{x_j} x(r)$  lauten die Gleichungen für  $r(X)$  hier:

$$x(r(X)) = X, \quad \frac{s_i r_j(X)}{s_j r_i(X)} = \frac{k_i}{k_j},$$

also ist  $r(X) = t(X) \left( \frac{s_1}{k_1}, \dots, \frac{s_n}{k_n} \right)$  mit einer Zahl  $t(X) \in \mathbb{R}_{>0}$ . Diese Zahl kann man aus der Bedingung  $x(r(X)) = X$  bestimmen, die auf  $t(X)^s c \left( \frac{s_1}{k_1} \right)^{s_1} \cdot \dots \cdot \left( \frac{s_n}{k_n} \right)^{s_n} = X$  mit  $s = s_1 + \dots + s_n$  hinausläuft, oder bei bekannten Gesamtkosten  $\kappa$  aus der Gleichung  $t(X) \left( \frac{s_1}{k_1} k_1 + \dots + \frac{s_n}{k_n} k_n \right) + k_0 = \kappa$ . Das Resultat ist:

$$r(X) = \left( \frac{X}{c} \right)^{1/s} \left( \frac{k_1}{s_1} \right)^{s_1/s} \cdot \dots \cdot \left( \frac{k_n}{s_n} \right)^{s_n/s} \left( \frac{s_1}{k_1}, \frac{s_2}{k_2}, \dots, \frac{s_n}{k_n} \right) = \frac{\kappa - k_0}{s} \left( \frac{s_1}{k_1}, \frac{s_2}{k_2}, \dots, \frac{s_n}{k_n} \right).$$

Da die Minimalkostenkombinationen  $r(X)$  für jedes Produktionsniveau  $X$  Vielfache desselben Vektors sind, sieht man:

- Bei Cobb–Douglas–Produktionsfunktion und linearer Kostenfunktion ist der Expansionspfad die Ursprungsgerade mit Richtung  $\left( \frac{s_1}{k_1}, \dots, \frac{s_n}{k_n} \right)$ .

Auch für allgemeine von einem Grad  $s$  homogene Produktionsfunktionen ist der Expansionspfad eine Ursprungsgerade, wenn er eindeutig definiert und die Kostenfunktion linear ist: denn dann ist  $\nabla x(tr) = t^{s-1} \nabla x(r)$ , also ist  $\nabla x(tr)$  für alle  $t > 0$  von  $\nabla K \equiv (k_1, \dots, k_n)$  linear abhängig, wenn das für  $t = 1$  der Fall ist, und daher ist  $tr$  die Minimalkostenkombination zum Niveau  $t^s X$ , wenn  $r$  die zu  $X$  ist.

Bei Kenntnis der Minimalkostenkombinationen  $r(X)$ , also des Expansionspfades, lassen sich verschiedene ökonomisch interessante Fragen beantworten: Zum Beispiel ergeben sich die *Faktornachfragefunktionen* zum Produktionsniveau  $X$  in Abhängigkeit von den Faktorpreisen, wenn man die Abhängigkeit von  $r(X)$  von den Faktorkostensätzen  $k_j$  untersucht, im obigen Cobb–Douglas–Fall bei linearen Kosten also die Funktionen

$$r_j(k_1, \dots, k_n; X) = \left( \frac{X}{c} \right)^{1/s} \left( \frac{k_1}{s_1} \right)^{s_1/s} \cdot \dots \cdot \left( \frac{k_n}{s_n} \right)^{s_n/s} \frac{s_j}{k_j}.$$

Der Faktorverbrauch hängt, bei Kosten–optimaler Produktionsweise, ersichtlich für jeden Faktor von den Preisen aller Faktoren ab. Fasst man gemäß dem früher formulierten ökonomischen Prinzip  $r(X)$  als Output–maximierenden Faktoreinsatzvektor bei gegebenen Gesamtkosten  $\kappa$  auf, so finden wir aber

$$r_j(k_1, \dots, k_n; \kappa) = \frac{\kappa - k_0}{s_1 + \dots + s_n} \cdot \frac{s_j}{k_j},$$

so dass die Faktornachfrage tatsächlich nur vom Kostensatz für den jeweiligen Faktor und von den Gesamtkosten abhängt. Weiter ergibt sich die *Gesamtkostenfunktion* als Funktion des Output  $X$  bei Kosten–optimalem Faktoreinsatz in der Form  $K(r(X))$ , also im Cobb–Douglas–Fall

$$K(r(X)) = k_0 + s \left( \frac{X}{c} \right)^{1/s} \left( \frac{k_1}{s_1} \right)^{s_1/s} \cdot \dots \cdot \left( \frac{k_n}{s_n} \right)^{s_n/s} \quad (s = s_1 + \dots + s_n),$$

was (bis auf die Fixkostenkonstante  $k_0$ ) eine Potenzfunktion von  $X$  mit Exponent  $1/s$  ist. Der Homogenitätsgrad der Produktionsfunktion (also die Skalanelastizität) ist maßgebend für den *Typ der Gesamtkostenfunktion*: Bei “steigenden Skalenerträgen”  $s > 1$  ist  $K(r(X))$  schwächer als linear wachsend (*sublinear, degressiv wachsend*), bei “konstanten Skalenerträgen”  $s = 1$  ist  $K(r(X))$  eine lineare Funktion von  $X$  und bei “fallenden Skalenerträgen”  $0 < s < 1$  wächst  $K(r(X))$  schneller als linear (*superlinear, progressiv* — dies ist der ökonomisch bedeutsamste Fall).

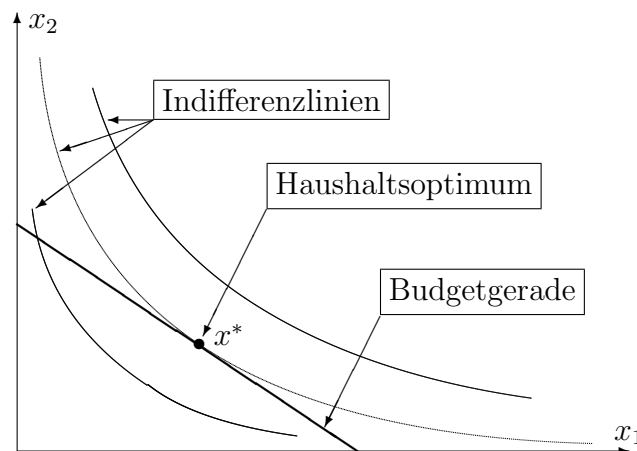
### (3) Nutzenmaximierung, Haushaltsoptimum:

Hier wird ein Haushalt betrachtet, der Gütermengen  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  von  $n$  Gütern konsumiert bei vorgegebener *Konsumsumme*  $C(x_1, \dots, x_n) = \gamma$  (*Haushaltsbudget*), wobei der Nutzen gemäß einer *Nutzenfunktion* (*Nutzenindex*)  $U(x_1, \dots, x_n)$  maximiert werden soll. Bei konstanten *Güterpreisen*  $p_1, \dots, p_n$  ist  $C(x_1, \dots, x_n) = p_1x_1 + \dots + p_nx_n$  eine lineare Funktion, und das Problem,  $U(x_1, \dots, x_n)$  zu maximieren unter der Nebenbedingung  $C(x_1, \dots, x_n) = \gamma$  ist völlig analog zu der in (2) behandelten Aufgabe, den Produktions-Output  $x(r_1, \dots, r_n)$  bei gegebenen linearen Gesamtkosten  $K(r_1, \dots, r_n) = \kappa$  zu maximieren. Unter natürlichen Annahmen an die Funktionen sahen wir, dass die letztere Aufgabe äquivalent ist zur Minimierung der Produktionskosten bei gegebenem Produktionsniveau  $X$ . Dementsprechend gilt auch hier unter entsprechenden Annahmen an die Konsumsummenfunktion und die Nutzenfunktion das ökonomische Prinzip:

- *Die Maximierung des Nutzens bei gegebenem Haushaltsbudget ist äquivalent zur Minimierung der Konsumsumme bei gegebenem Nutzen.*

Die Mathematik für das Problem der Nutzenmaximierung ist also dieselbe wie die für den optimalen Faktoreinsatz in (2), nur die ökonomische Terminologie ist jetzt anders. So heißen die Niveaumengen der Nutzenfunktion nun *Indifferenzmengen*. Sind die Super-niveaumengen der Nutzenfunktion streng konvex, so gibt es bei linearer Konsumfunktion genau einen Nutzen-maximierenden Konsumvektor  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ , mit  $C(x^*) = \gamma$ , genannt das **Haushaltsoptimum** zum Budget  $\gamma$ . (Das entspricht der Minimal-kostenkombination  $r^* = (r_1^*, \dots, r_n^*)$  zum Produktionsniveau  $X$  in (2).)

Das Haushaltsoptimum lässt sich graphisch bestimmen, wenn es nur zwei Güter gibt (bzw. wenn  $x_3, \dots, x_n$  als konstant angenommen werden), indem man die *Indifferenzlinie*  $U(x_1, x_2) = u$  bestimmt, welche die gegebene *Budgetgerade*  $p_1x_1 + p_2x_2 = \gamma$  berührt; der Berührungspunkt  $x^*$  ist dann das Haushaltsoptimum  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ .



Die Indifferenzlinien sind typischerweise Graphen degressiv fallender (also streng konvexer, streng fallender) Funktionen. Ökonomisch interpretiert bedeutet dies, dass bei Mehrverbrauch des einen Gutes von einem anderen bei gleichem Nutzen weniger konsumiert wird, wobei der Effekt jedoch mit wachsendem Verbrauch des ersten Gutes immer schwächer ausgeprägt ist, d.h. die Substitutionsrate  $\frac{dx_2}{dx_1}(x_1)$  ist negativ und nimmt mit wachsendem  $x_1$  dem Betrage nach ab. (Dabei wird  $x_2$  als Funktion von  $x_1$  implizit definiert durch die Gleichung  $U(x_1, x_2) = u$ , siehe 5.7; der Graph der Funktion  $x_2(x_1)$  ist dann gerade die Indifferenzlinie zum Nutzen  $u$ .) Bei einer Nutzenfunktion von Cobb-Douglas-Typ  $U(x_1, \dots, x_n) = c x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$  zum Beispiel mit  $c > 0$  und Exponenten  $s_1, \dots, s_n > 0$  ist  $x_2(x_1) = d x_1^{-s_2/s_1}$  eine degressiv fallende Funktion (mit einer Konstanten  $d$ , die von  $u, c, s_1, \dots, s_n$  und auch vom Wert der anderen Variablen  $x_3, \dots, x_n$  abhängt).



Die *notwendigen Bedingungen für das Haushaltsoptimum*, also Maximumstellen von  $U(x)$  bei der Nebenbedingung  $C(x) = \gamma$ , lauten nun

$$C(x) = \gamma, \quad \nabla U(x), \nabla C(x) \quad \text{linear abhängig,}$$

bzw. explizit bei konstanten Güterpreisen

$$C(x) = \gamma, \quad \frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)}{\frac{\partial U}{\partial x_j}(x)} = \frac{p_i}{p_j} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial U}{\partial x_j}(x) \frac{p_i}{p_j}$$

für  $1 \leq i < j \leq n$ . In Worten:

- *Im Haushaltsoptimum verhalten sich die Grenznutzen zweier Güter zueinander wie ihre Preise;*
- *bei Mehrverbrauch eines Gutes ist der Nutzenzuwachs pro dafür aufzuwendende Geldeinheiten im Haushaltsoptimum für alle Güter gleich*

Diese Gesetze heißen, wie schon erwähnt, **Ausgleich des Grenznutzens** oder **zweites Gossensches Gesetz**. *Ökonomische Interpretation des Lagrange-Multiplikators*  $\lambda$  in der Gleichung  $\nabla U(x) = \lambda \nabla C(x)$  für lineare Abhängigkeit der Gradienten:  $\lambda$  gibt (näherungsweise) die Erhöhung des Nutzens an, wenn die Konsumsumme um eine Einheit erhöht und der Mehrverbrauch der Güter dabei zur maximalen Nutzensteigerung eingerichtet wird, bzw. wenn man den Nutzen-optimalen Konsumvektor in Richtung maximal wachsenden Konsums so ändert, dass die Konsumsumme um eine Einheit zunimmt.

Bestimmt man für jeden Wert  $g$  des Budgets das zugehörige Haushaltsoptimum  $x(\gamma)$ , also den Nutzen-optimalen Konsumvektor zur Nebenbedingung  $C(x) = \gamma$  (unterstellt es gibt zu jedem interessierenden Wert  $\gamma > 0$  ein eindeutiges Haushaltsoptimum), so erhält man eine Kurve  $\gamma \mapsto x(\gamma) \in \mathbb{R}^n$ , die (nach dem Statistiker Engel) eine *Engel-Kurve* heißt. Die Engel-Kurven entsprechen formal den Expansionspfaden in (2) bei optimaler Produktion. Kennt man die Engel-Kurve  $x(\gamma)$  explizit, so kann man durch Analyse ihrer Abhängigkeit von den Preisen  $p_1, \dots, p_n$  der Güter die *Nachfragefunktionen*  $x_j(p_1, \dots, p_n; \gamma)$  bei fester Konsumsumme  $\gamma$  als Funktion der Preise aufstellen. (Die Nachfrage  $x_j(p_1, \dots, p_n; \gamma)$  ist nichts anderes als die  $j$ -te Komponente des Haushaltsoptimums  $x(\gamma)$  bei Budget  $\gamma$ , nur dass jetzt die Abhängigkeit von den Parametern  $p_1, \dots, p_n$  in der Notation zum Ausdruck gebracht wird.) Da in den notwendigen Bedingungen für das Haushaltsoptimum nur Quotienten der Preise  $p_i/p_j$  auftreten, ist klar:

- *eine simultane Erhöhung aller Preise um denselben Prozentsatz verändert das Haushaltsoptimum  $x(\gamma)$  nicht;*
- *die Nachfragefunktionen  $x_j(p_1, \dots, p_n; \gamma)$  hängen also homogen vom Grad 0 vom Preisvektor  $p = (p_1, \dots, p_n)$  ab.*

Bestimmt man bei fixiertem Budget und fixierten Preisen  $p_i$  für Indizes  $i \neq h$  das Haushaltsoptimum  $x(p_1, \dots, p_n; \gamma) = x(p_h)$  als Funktion des Preises  $p_h$  allein, so erhält man die sog. *Offer-Kurve* (*Preis-Konsum-Kurve*) zum  $h$ -ten Gut. Ein seinen Nutzen optimierender Haushalt wird auf eine Preisänderung beim  $h$ -ten Gut durch geänderte Nachfragen  $x_j(p_h)$  entsprechend der Offer-Kurve reagieren.

Die weitere Diskussion kann insbesondere für konkrete Cobb-Douglas-Nutzenfunktionen völlig analog zu (2) durchgeführt werden und bringt — abgesehen von der anderen Terminologie — inhaltlich nichts Neues. Wir verzichten daher auf weitere Ausführungen und verweisen auf die einschlägigen Lehrbücher (z.B. Tietze, § 7.3.3.4). ■

## 5.6 Ableitungen höherer Ordnung

Die Änderungsraten ökonomischer Größen werden mathematisch durch (partielle, Richtungs- oder totale) Ableitungen modelliert. In der Ökonomie sind aber nicht nur Änderungsraten von Bedeutung, also die quantifizierte Beschreibung der Zunahme bzw. Abnahme von Größen, sondern auch “Trendänderungen”, also Änderungen der Änderungsraten (verlangsamtes Wachstum, beschleunigte Abnahme etc.) samt Quantifizierung dieser Trendänderungen. Dies entspricht im mathematischen Modell Ableitungen zweiter Ordnung. Bei einer Funktion  $f(x)$  von nur einer reellen Variablen ist die zweite Ableitung  $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$  nichts anderes als die Ableitung der Ableitungsfunktion  $f' = \frac{df}{dx}$  erster Ordnung auf ihrem Definitionintervall. Bei Funktionen  $f(x_1, \dots, x_n)$  von  $n \geq 2$  Veränderlichen kann man analog partielle Ableitungen zweiter Ordnung  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$  bilden, indem man zweimal nach einer Variablen  $x_j$  differenziert (c.p., d.h. bei festgehaltenen Werten der anderen Variablen). Man kann aber beim zweiten Differenzieren  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  auch nach einer anderen Variablen  $x_i$  ( $i \neq j$ ) partiell ableiten (wobei dann die Werte  $x_h$  mit  $h \neq i$  festgehalten werden) und erhält so etwas Neues, was kein Gegenstück bei Funktionen einer Variablen hat, nämlich “gemischte” partielle Ableitungen zweiter Ordnung. Natürlich lässt sich der Differentiationsprozess auch weiter fortsetzen, was zu partiellen Ableitungen immer höherer Ordnung führt. Aber für die mathematische Beschreibung ökonomischer Vorgänge werden Ableitungen der Ordnung größer als 2 kaum gebraucht.

**DEFINITION:** (i) Ist  $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\rightarrow \mathbb{R}^m$ ) auf der offenen Menge  $D$  in  $\mathbb{R}^n$  nach allen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  selbst wieder nach allen Variablen differenzierbare Funktionen auf  $D$ , so heißt  $f$  **zweimal partiell differenzierbar** auf  $D$ , und man schreibt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

für die “gemischten” ( $i \neq j$ ) bzw. “reinen” ( $i = j$ ) **partiellen Ableitungen zweiter Ordnung** von  $f$  auf  $D$ . Die  $n \times n$ -Matrixfunktion

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1..n}$$

mit allen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung als Einträgen heißt die **Hesse-Matrix** von  $f$  auf  $D$ .

(ii) **Partielle Ableitungen höherer Ordnung** erklärt man analog und schreibt z.B.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x_h \partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_h} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right), & \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right), & \frac{\partial^3 f}{\partial x_j^3} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right), \end{aligned}$$

und allgemein

$$\frac{\partial^q f}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \dots \partial x_n^{q_n}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_1}}_{q_1} \left( \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_2}}_{q_2} \left( \dots \left( \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}}_{q_n} f \right) \dots \right) \right),$$

wobei die Exponenten  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}_0$  angeben, wie oft nach den einzelnen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  partiell differenziert wird, und  $q = q_1 + \dots + q_n$  die Gesamtordnung der Ableitung ist. ■

**BEISPIELE:** (1) Die Funktion  $f(x, y) = x^2(1 + y)$  von zwei Variablen hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(1 + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2,$$

und zweite partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2(1 + y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$

die Hesse-Matrix von  $f$  ist also (als Funktion von  $(x, y)$ )

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial(x, y)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+y) & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen dritter Ordnung von  $f$ , die nicht verschwinden, sind alle konstant:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = 2.$$

Sämtliche anderen partiellen Ableitungen dritter Ordnung sind Null auf  $\mathbb{R}^2$  und ebenso alle partiellen Ableitungen vierter oder höherer Ordnung. (Das muss auch so sein, weil  $f$  eine Polynomfunktion vom Grad 3 ist; siehe (4) unten.)

(2) Die Funktion  $f(x, y, z) = x^3 e^{yz}$  von drei Variablen hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 e^{yz}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 z e^{yz}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^3 y e^{yz},$$

und die Hesse-Matrix

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial(x, y, z)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = e^{yz} \begin{pmatrix} 6x^2 & 3x^2 z & 3x^2 y \\ 3x^2 z & x^3 z^2 & x^3 \\ 3x^2 y & x^3 & x^3 y^2 \end{pmatrix}.$$

(3) *Partielle Ableitungen von Monomen*  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$  kann man für beliebige Ordnungen leicht ausrechnen: Jede Differentiation  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  erniedrigt den Exponenten bei  $x_j$  um 1 und produziert den (unverminderten) Exponenten als Vorfaktor; bei Exponent 0 an  $x_j$  gibt die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  das Ergebnis Null. In Formeln ist das komplizierter als in Worten:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^q}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \cdots \partial x_n^{q_n}} \left( x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \right) \\ &= \frac{k_1!}{(k_1 - q_1)!} \frac{k_2!}{(k_2 - q_2)!} \cdots \frac{k_n!}{(k_n - q_n)!} x_1^{k_1 - q_1} x_2^{k_2 - q_2} \cdots x_n^{k_n - q_n}, \end{aligned}$$

mit der Konvention, dass das Ergebnis als Null zu interpretieren ist, wenn  $q_j > k_j$  ist für einen Index  $j$ . (Im Fall  $q_j = k_j$  ist  $(k_j - q_j)! = 1$  und  $x_j^{k_j - q_j} = 1$  zu interpretieren.)

Bewährt und bequem ist die *Multiindex-Schreibweise*: Ein  $n$ -gliedriger *Multiindex*  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ist ein  $n$ -tupel von nichtnegativen ganzen Zahlen, seine *Ordnung* ist die Summe der Komponenten und wird  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  notiert, seine *Fakultät* ist  $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$ . Man kürzt dann ab

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}, \quad \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{\beta_n}}$$

für Monome bzw. für partielle Ableitungsoperationen zu Multiindizes  $\alpha, \beta$  und kann nun die partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung von Monomen kurz so angeben:

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} x^\alpha = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta}, \quad \text{wenn } \beta \leq \alpha, \quad \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} x^\alpha = 0 \quad \text{sonst,}$$

wo  $\beta \leq \alpha$  bedeutet, dass  $\beta_j \leq \alpha_j$  ist für alle  $j = 1 \dots n$ , so dass genau in diesem Falle  $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$  wieder ein Multiindex ist. Mit der Multiindexschreibweise sieht die Formel für beliebige partielle Ableitungen von Monomen in  $n$  Veränderlichen ganz ähnlich aus wie die Formel  $\frac{d^m}{dx^m} x^l = \frac{l!}{(l-m)!} x^{l-m}$  für Ableitungen beliebiger Ordnung von Potenzfunktionen in einer Variablen.

(4) Allgemeine *Polynomfunktionen* von  $n$  Veränderlichen sind Linearkombinationen von Monomen und lassen sich mit der Multiindexschreibweise so darstellen:

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq l} c_\alpha x^\alpha \quad (c_\alpha = c_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}),$$

wobei der Grad des Polynoms gleich  $l$  ist, genau wenn mindestens ein Koeffizient  $c_\alpha$  von höchster auftretender Ordnung  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = l$  nicht verschwindet. Da die Summen- und die Faktorregel für partielle Ableitungen beliebiger Ordnung offenbar genauso gelten wie bei Ordnung 1, erhält man also für *partielle Ableitungen beliebiger Ordnung von Polynomfunktionen*  $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq l} c_\alpha x^\alpha$  vom Grad  $l$ :

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} p(x) = \sum_{|\alpha| \leq l, \alpha \geq \beta} c_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta}.$$

Man sieht:

- Die partiellen Ableitungen der Ordnung  $m \leq l$  einer Polynomfunktion vom Grad  $l$  sind Polynomfunktionen vom Grad  $l - m$ ;
- die partiellen Ableitungen der Ordnung  $l$  einer Polynomfunktion vom Grad  $l$  sind konstant;
- die partiellen Ableitungen der Ordnung  $m > l$  einer Polynomfunktion vom Grad  $l$  verschwinden. ■

**BEMERKUNGEN:** 1) In den Beispielen haben wir nur skalare Funktionen betrachtet, aber bei *Vektorfunktionen*  $F = (f_1, \dots, f_m)$  von  $n$  Variablen  $x = (x_1, \dots, x_n)$  geht alles analog, indem man die partiellen Ableitungen höherer Ordnung komponentenweise bildet, zum Beispiel

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

Jede partielle Ableitung beliebiger Ordnung von  $F = (f_1, \dots, f_m)$  ist wieder eine Vektorfunktion mit ebensovielen Komponentenfunktionen wie  $F$ . Die Hesse-Matrix  $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$  hat dann also Vektoren aus  $\mathbb{R}^m$  (bzw.  $\mathbb{R}^m$ -wertige Funktionen) als Einträge. Man kann sie auch als *Multimatrix*  $\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)$  des Formats  $m \times n \times n$  auffassen, d.h. als ein mit mehr als zwei Laufindizes nummeriertes Zahlenschema (hier laufen  $i = 1 \dots m$  und  $j, k = 1 \dots n$ ). Auch die partiellen Ableitungen dritter Ordnung einer skalaren Funktion  $f$  von  $n$  Veränderlichen kann man zu einer Multimatrix  $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}\right)$  des Formats  $n \times n \times n$  zusammenstellen, und die partiellen Ableitungen dritter Ordnung einer Vektorfunktion  $F = (f_1, \dots, f_m)$  von  $n$  Variablen zu einer Multimatrix des Formats  $m \times n \times n \times n$  usw.

2) Elementare Funktionen von mehreren Veränderlichen, die durch Rechterme gegeben sind, welche aus den Koordinatenfunktionen und reellen Konstanten mit den algebraischen Rechenoperationen und Verkettung aufgebaut sind (“geschlossene Form”), haben gemäß Ableitungsrechenregeln (insbesondere auch der allgemeinen Kettenregel 5.3) wieder elementare Funktionen als partielle Ableitungen erster Ordnung. Folglich existieren für sie auf einem offenen Definitionsbereich alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung und sind wieder elementare Funktionen.

- *Elementare Funktionen von mehreren Veränderlichen sind beliebig oft partiell differenzierbar;*
- *und die partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung sind wieder elementare Funktionen, die mit den Ableitungsrechenregeln in geschlossener Form berechnet werden können.* ■

In den Beispielen oben ist sicher aufgefallen, dass alle berechneten Hesse-Matrizen symmetrisch waren, d.h. dass gemischte partielle Ableitungen zweiter Ordnung wie  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$  etc. nicht von der Reihenfolge der ausgeführten partiellen Differentiationen erster Ordnung abhängen. Dasselbe zeigt sich in den obigen Beispielen bei den partiellen Ableitungen höherer Ordnung. Das ist kein Zufall, sondern es gilt der folgende Satz, der das wichtigste mathematische Ergebnis über Ableitungen höherer Ordnung ist und auch in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften verwendet wird:

**SATZ (Vertauschbarkeit partieller Ableitungen, Symmetrie der Hesse-Matrix);**

Sind für  $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\rightarrow \mathbb{R}^m$ ) die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  und

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$  auf  $D$  definiert und stetig, so existiert auch die partielle Ableitung in umgekehrter Differentiationsreihenfolge  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$  und es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Sind alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig, so ist also die Hesse-Matrix von  $f$  symmetrisch. Sind alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $l$  stetig, so hängt eine konkrete partielle Ableitung  $l$ -ter Ordnung nur davon ab, wie oft nach den einzelnen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  differenziert wird und nicht von der Reihenfolge der einzelnen Ableitungsoperationen erster Ordnung.

Da elementare Funktionen partielle Ableitungen beliebiger Ordnung haben, die (als elementare Funktionen) auf ihrem offenen Definitionsbereich auch stetig sind, *gilt das alles insbesondere für elementare Funktionen*. Das bedeutet, dass man in der Praxis partielle Ableitungsoperationen bedenkenlos vertauschen kann. Das spart auch Rechenaufwand: Statt aller  $n^2$  Einträge der Hesse-Matrix genügt es, die  $\frac{1}{2}n(n+1)$  Einträge auf und oberhalb der Diagonalen zu berechnen, weil sich die anderen Einträge dann aus der Symmetrie der Matrix ergeben. In der Mathematik gibt es Beispiele von Funktionen  $f(x, y)$ , für die  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  ist an gewissen Stellen. Diese Funktionen können dann keine *stetigen* partiellen Ableitungen zweiter Ordnung haben und es handelt sich um artifiziiell konstruierte Funktionen, die in der Mathematik für die Wirtschaftswissenschaft nie auftauchen. Immerhin zeigen solche Beispiele aber, dass der obige Satz nicht selbstverständlich ist, und deshalb skizzieren wir für Interessierte nun auch einen

*Beweis:* Um Schreibarbeit zu vermeiden, betrachten wir nur eine Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  beim Nullpunkt und nehmen an, dass  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  nahe dem Ursprung  $(0, 0)$  stetig ist mit  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$ . (Das lässt sich erreichen, indem man  $g(x, y) = xy \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  von  $f(x, y)$  subtrahiert und  $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$  bemerkt.) Zu zeigen ist dann  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$ . Diese Ableitung ist nun der Limes bei  $x \rightarrow 0$  von

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right] &= \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} - \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)}{xy}, \end{aligned}$$

und zu zeigen ist, dass dies bei  $x \rightarrow 0$  gegen Null strebt. Dazu schreiben wir den Zähler mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung so um (bei festen  $x, y$ ):

$$[f(x, y) - f(0, y)] - [f(x, 0) - f(0, 0)] = \int_0^x \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) \right] dt.$$

Nun ist  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  nach Voraussetzung stetig mit Wert 0 in  $(0, 0)$ . Das bedeutet, dass wir zu beliebig kleinem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  finden, so dass  $|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)| \leq \varepsilon$  ist für  $|x| < \delta$  und  $|y| < \delta$ . Für  $|t| \leq |x| < \delta$  und  $|y| < \delta$  folgt aus dem Schrankensatz (in einer Variablen) dann  $|\frac{\partial f}{\partial x}(t, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)| \leq \varepsilon|y|$ , der Integrand oben hat also Betrag  $\leq \varepsilon|y|$ , und weil  $|x|$  die Länge des Integrationsintervalls ist, kann der Betrag des Integrals  $\varepsilon|x||y|$  nicht übersteigen. Also hat  $\frac{1}{xy}[f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)]$  Betrag  $\leq \varepsilon$  für  $|x| < \delta$  und  $|y| < \delta$ , und das gilt dann auch für den Limes dieses Ausdrucks bei  $|y| \rightarrow 0$ , wenn  $x$  mit  $|x| < \delta$  festgehalten wird. Somit gilt  $\left| \frac{1}{x} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right] \right| \leq \varepsilon$  für  $|x| < \delta$ , und gemäß Grenzwertdefinition bedeutet das  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right] = 0$ , was zu zeigen war.

**DEFINITION:** Die **Richtungsableitungen höherer Ordnung** von  $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\rightarrow \mathbb{R}^m$ ) werden auf der offenen Menge  $D$  erklärt durch

$$\partial_v \partial_u f = \partial_v (\partial_u f) \quad \text{für } u, v \in \mathbb{R}^n,$$

wenn  $f$  stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung zwei hat, und für beliebige Ordnungen  $l \geq 3$  durch

$$\partial_{w_1} \cdots \partial_{w_2} \partial_{w_1} f = \partial_{w_1} (\cdots \partial_{w_2} (\partial_{w_1} f) \cdots) \quad \text{für } w_1, w_2, \dots, w_l \in \mathbb{R}^n,$$

wenn  $f$  stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung  $l$  hat. ■

**SATZ (Multilinearität und Vertauschbarkeit von Richtungsableitungen höherer Ordnung):** Die Richtungsableitungen höherer Ordnung sind unabhängig von der Reihenfolge, in der die einzelnen Richtungsableitungen erster Ordnung ausgeführt werden, und das Ergebnis hängt linear ab von jedem dabei auftretenden Richtungsvektor.

Um das einzusehen, genügt es offenbar, den Fall  $l = 2$  zu behandeln. Für  $u = (u_1, \dots, u_n)$  und  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ist dann

$$\begin{aligned}\partial_u(\partial_v f) &= \partial_v \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n u_j \partial_v \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^n u_j \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{j,k=1}^n u_j v_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}.\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der Hesse-Matrix ist der letzte Ausdruck symmetrisch bzgl.  $u$  und  $v$  und hängt offenbar auch linear ab von  $u$  und  $v$ , was den Satz beweist.

**BEMERKUNGEN:** 1) Für Ordnung 2 kann man den Satz so aussprechen:

- Die Hesse-Form  $d_x^2 f$  von  $f$  ist eine symmetrische Bilinearform.

Dabei ist die **Hesse-Form** als Funktion von Vektorpaaren  $u, v \in \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$d_x^2 f(u, v) = \partial_u \partial_v f(x) = \partial_v \partial_u f(x)$$

und heißt auch **totale Ableitung zweiter Ordnung** von  $f$  an der Stelle  $x$ . Sie hängt, wie gerade vorgerechnet wurde, mit der Hesse-Matrix so zusammen:

$$d_x^2 f(u, v) = \sum_{j,k=1}^n u_j v_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = v \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \right) u.$$

2) Entsprechend heißt die “symmetrische Multilinearform”

$$d_x^l f(w_1, w_2, \dots, w_l) = \partial_{w_1} \cdots \partial_{w_l} f(x),$$

die linear von jedem der Vektoren  $w_1, w_2, \dots, w_l \in \mathbb{R}^n$  abhängt und bei beliebiger Permutation der Vektoren ihren Wert nicht ändert, die **totale Ableitung  $l$ -ter Ordnung** von  $f$  an der Stelle  $x$ . Auch sie kann durch die Komponenten der Vektoren  $w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}) \in \mathbb{R}^n$  und die partiellen Ableitungen  $l$ -ter Ordnung von  $f$  ausgedrückt werden:

$$d_x^l f(w_1, w_2, \dots, w_l) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_l=1}^n w_{1j_1} w_{2j_2} \cdots w_{lj_l} \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_l}}(x).$$

3) Da die Hesse-Form  $d_x^2 f(u, v)$  symmetrisch ist, sind ihre Werte schon durch die zugehörige quadratische Form  $d_x^2 f(w, w)$ , also ihre Werte auf Paaren gleicher Vektoren, völlig bestimmt. Es gilt nämlich die *Polarisationsformel*

$$4 d_x^2 f(u, v) = d_x^2 f(u + v, u + v) - d_x^2 f(u - v, u - v)$$

die man durch Ausrechnen der rechten Seite mit der Bilinearität und Symmetrie der Hesse-Form bestätigt. Alle Richtungsableitungen zweiter Ordnung sind also schon festgelegt durch die “reinen” Richtungsableitungen zweiter Ordnung, bei denen zweimal in dieselbe Richtung abgeleitet wird. Hierfür gilt:

$$d_x^2 f(w, w) = \partial_w^2 f(x) = \partial_w \partial_w f(x) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} f(x + tw),$$

d.h. es handelt sich einfach um die zweite Ableitung der Funktion, wenn man sie als Funktion von “einer Variablen in Richtung  $w$ ” auffasst. Das sieht man, indem man  $\frac{d}{dt} f(x + tw) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(x + tw + sw) = \partial_w f(x + tw)$  nach  $t$  differenziert. Für “gemischte” Richtungsableitungen ergibt sich analog

$$d_x^2 f(u, v) = \partial_v \partial_u f(x) = \left. \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \right|_{s=t=0} f(x + su + tv).$$

Auch für Ordnungen  $l > 2$  ist  $d_x^l f$  schon völlig bestimmt durch die “reinen” Richtungsableitungen  $l$ -ter Ordnung

$$d_x^l f(w, w, \dots, w) = \partial_w^l f(x) = \left. \frac{d^l}{dt^l} \right|_{t=0} f(x + tw)$$

bei denen  $l$  Mal in dieselbe Richtung abgeleitet wird. Wegen der Symmetrie von  $d_x^l f$  bzgl. beliebiger Permutationen der Vektoren gilt nämlich auch hier eine (kompliziertere) Polarisationsformel. ■

Die Hesse-Form (oder Hesse-Matrix) spielt eine Rolle bei Ableitungskriterien zweiter Ordnung für Extremstellen, die analog sind zu den Ableitungskriterien zweiter Ordnung für Extremstellen von Funktionen einer Veränderlichen. Diese Kriterien können unter Umständen Aufschluss geben über die Natur eines kritischen Punktes (lokale Extremstelle oder Sattelpunkt). Bei Funktionen  $f(x)$  von einer reellen Variablen war hier das Vorzeichen der zweiten Ableitung  $f''$  in den Nullstellen von  $f'$  maßgebend. Bei einem kritischen Punkt  $x_0$  einer reellen Funktionen von  $n$  Veränderlichen  $x = (x_1, \dots, x_n)$  tritt die  $n \times n$ -Hesse-Matrix  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)$  an die Stelle der zweiten Ableitung. Die analoge Bedingung zur Positivität bzw. Negativität des Wertes der zweiten Ableitung ist nun die positive Definitheit bzw. negative Definitheit der symmetrischen Hesse-Matrix. (Siehe 3.5 für diese Konzepte; wir wiederholen unten das Nötige.)

**SATZ (Kriterien zweiter Ordnung für innere Extremstellen):** *Hat die reelle Funktion  $f$  auf der offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung, so gilt für  $x_0 \in D$ :*

**(i) (notwendiges Kriterium)** *Ist  $x_0$  lokale Minimumstelle [bzw. lokale Maximumstelle] von  $f$  auf  $D$ , so ist  $\nabla f(x_0) = 0$  und die Hesse-Matrix  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)$  an der Stelle  $x_0$  positiv semidefinit [bzw. negativ semidefinit].*

**(ii) (hinreichendes Kriterium)** *Ist  $\nabla f(x_0) = 0$  und die Hesse-Matrix  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)$  an der Stelle  $x_0$  positiv definit [bzw. negativ definit], so hat  $f$  in  $x_0$  eine lokale strikte Minimumstelle [bzw. Maximumstelle].*



Der *Beweis* dieser Aussagen ist im Wesentlichen eine Angelegenheit der Differentialrechnung für Funktionen von *einer* Variablen. (i) ergibt sich durch Betrachtung der Funktion  $f(x + tu)$  von der reellen Variablen  $t$  mit einer lokalen Minimumstelle (bzw. Maximumstelle) bei  $t = 0$ . Nach 4.5 gilt also  $u \cdot \nabla f(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x_0 + tu) = 0$  und  $u \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \right) u = \partial_u^2 f(x_0) = \frac{d^2}{dt^2}|_{t=0} f(x_0 + tu) \geq 0$  (bzw.  $\leq 0$ ) für alle Vektoren  $u \in \mathbb{R}^n$ , und das ist gerade die behauptete Semidefinitheit der Hesse-Matrix an der Stelle  $x_0$ . Bei (ii) besagt die vorausgesetzte positive Definitheit der Hesse-Matrix  $u \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \right) u > 0$  für alle  $u \neq 0$  und wegen  $\nabla f(x_0) = 0$  zeigt dieselbe Rechnung dann  $\frac{d}{dt}|_{t=0} f(x_0 + tu) = 0$  und  $\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0} f(x_0 + tu) > 0$ , also hat  $f$  auf jeder Geraden durch  $x_0$  eine lokale strikte Minimumstelle in  $x_0$ . Das reicht noch nicht ganz für einen strengen Beweis von (ii), weil die Strecken durch  $x_0$ , auf denen  $x_0$  absolute Minimumstelle ist, beliebig kurz sein könnten, so dass  $x_0$  evtl. nicht “in allen Richtungen gleich weit”, d.h. nicht auf einer vollen Kugel  $U_\delta(x_0)$  in  $\mathbb{R}^n$  mit Radius  $\delta > 0$ , absolute Minimumstelle für  $f$  ist. Die positive Definitheit der Hesse-Matrix bedeutet aber, dass es eine Zahl  $\lambda > 0$  gibt, ihr kleinster Eigenwert, mit  $u \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \right) u > \lambda$  für alle Einheitsvektoren  $u$ . Wegen der Stetigkeit der zweiten Ableitungen von  $f$  gibt es dann ein  $\delta > 0$  mit  $u \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \right) u > \frac{1}{2}\lambda$  für alle Punkte  $x$  aus der Kugel  $U_\delta(x_0)$ . Wegen  $\frac{d^2}{dt^2} f(x_0 + tu) = u \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x + tu) \right) u$  heißt das, dass  $f(x_0 + tu)$  für alle Einheitsvektoren  $u$  eine streng konvexe Funktion von  $t$  auf dem Intervall  $]-\delta, \delta[$  ist. Da diese Funktion eine Ableitungsnullstelle in  $t = 0$  hat, ist gemäß 4.5  $t = 0$  ihre eindeutige Minimumstelle im Intervall  $]-\delta, \delta[$ , d.h.  $x_0$  ist eindeutige Minimumstelle von  $f$  auf der Kugel  $U_\delta(x_0)$ .

**BEMERKUNGEN:** 1) Die Ableitungskriterien zweiter Ordnung für Extrema sind nur von beschränktem Nutzen; denn der Rechenaufwand ist meistens sehr hoch (Hesse-Matrix berechnen, Definitheit algebraisch überprüfen), die damit evtl. gewonnene Information aber gering (Streichung einiger innerer Kandidaten aus der Liste für absolute Minimum- oder Maximumstellen). Genauer gesagt bringt das notwendige Kriterium bei der Suche nach den absoluten Extremstellen nur Folgendes:

- *Innere kritische Punkte mit nicht positiv semidefiniter Hesse-Matrix kann man aus der Kandidatenliste für (lokale) Minimumstellen streichen, innere Punkte mit nicht negativ definiter Hesse-Matrix aus der Kandidatenliste für (lokale) Maximumstellen, innere Punkte mit indefiniter Hesse-Matrix aus der Liste für (lokale) Extremstellen.*

2) Ist  $x_0$  innerer kritischer Punkt von  $f$  und die Hesse-Matrix an dieser Stelle nur semidefinit, nicht definit oder indefinit, so kann man über die Natur des kritischen Punktes überhaupt nichts schließen – es kann sich um eine lokale Minimumstelle, eine lokale Maximumstelle oder einen Sattelpunkt handeln. Das zeigen die Funktionen  $x^4 + y^4$ ,  $x^4 - y^4$ ,  $-x^4 - y^4$  von zwei Veränderlichen im kritischen Punkt  $(0, 0)$ , wo die Hesse-Matrix die Nullmatrix ist. In einer solchen Situation sind eben Ableitungen höherer Ordnung als 2 für das Funktionsverhalten in der Nähe des kritischen Punktes maßgebend. (Es gibt dafür auch bei Funktionen von mehreren Veränderlichen Extremstellenkriterien höherer Ordnung, die aber zu kompliziert und nicht von großer praktischer Bedeutung sind.)

Auch das hinreichende Kriterium zweiter Ordnung liefert weniger Information, als man zunächst denken könnte. Der Grund ist, dass über die Größe der Umgebung von  $x_0$ , in der  $x_0$  z.B. eindeutige absolute Maximumstelle von  $f$  ist, überhaupt nichts gesagt wird – die Umgebung könnte winzig klein sein, so dass  $f$  schon sehr nahe bei  $x_0$  kleinere

Werte annehmen kann als  $f(x_0)$ . Es ist bei Funktionen von mehreren Veränderlichen — anders als bei einer Veränderlichen — auch *nicht richtig*, dass  $f$  mit lokaler isolierter Minimumstelle bei  $x_0$  immer “bis zum nächsten kritischen Punkt” minimiert. also etwa auf der größten offenen Kugel um  $x_0$ , die keine weiteren kritischen Punkte enthält. Mit der Taylor-Formel (s.u.) kann man unter Umständen Aufschluss über die Größe der Kugeln um  $x_0$  erhalten, auf denen  $x_0$  absolute Minimumstelle von  $f$  ist.

3) Die obigen Kriterien zweiter Ordnung nützen natürlich nur etwas, wenn man auch in der Lage ist, (Semi-)Definitheit der Hesse-Matrix nachzuprüfen. Das ist eine rein algebraische Angelegenheit, für die wir auf 3.5 verweisen. Wir erinnern hier nur an die dort für symmetrische  $n \times n$ -Matrizen  $A$  hergeleiteten **Definitheitskriterien**:

- $A$  positiv definit, d.h.  $u \bullet Au > 0$  für alle  $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$
- $\iff$  alle Eigenwerte von  $A$  sind positiv
- $\iff$  die durch Streichen der letzten  $n-k$  Zeilen und Spalten von  $A$  entstehenden  $k \times k$ -Untermatrizen haben positive Determinante für  $k = 1 \dots n$ .

Nützlich ist unter Umständen auch Folgendes:

Positiv definite Matrizen haben positive Diagonaleinträge und alle zur Diagonalen symmetrischen Untermatrizen haben positive Determinante.

Für Semidefinitheit hat man folgendes Kriterium:

- $A$  positiv semidefinit, d.h.  $u \bullet Au \geq 0$  für alle  $u \in \mathbb{R}^n$
- $\iff$  alle Eigenwerte von  $A$  sind nichtnegativ
- $\iff$  die durch Streichen der letzten  $n-k$  Zeilen und Spalten von  $A$  entstehenden Untermatrizen haben positive Determinante für  $k = 1 \dots n-1$  und  $\det A \geq 0$ .

Die umgekehrte Implikation  $\implies$  gilt hier (leider) nicht.

Positiv semidefinite Matrizen haben nichtnegative Diagonaleinträge und alle zur Diagonalen symmetrischen Untermatrizen haben nichtnegative Determinante.

Für negative (Semi-)Definitheit erhält man entsprechende Kriterien mit

$$A \text{ negativ (semi-)definit} \iff -A \text{ positiv (semi-)definit.}$$

Aber *Achtung*: Die Determinante einer  $k \times k$ -Untermatrix von  $-A$  ist das  $(-1)^k$ -fache der Determinante der entsprechenden Untermatrix von  $A$ . Negativ definite Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  haben also negative Diagonaleinträge, aber positive Determinanten von zur Diagonalen symmetrischen  $2 \times 2$ -Untermatrizen, negative Determinanten für zur Diagonalen symmetrische  $3 \times 3$ -Untermatrizen ... und  $\det A$  ist nur negativ, wenn  $n$  ungerade ist, aber positiv, wenn  $n$  gerade ist! Letzteres kann man auch daran sehen, dass die Determinante das Produkt aller — mit ihrer Vielfachheit aufgezählten — Eigenwerte ist; eine negativ definite  $n \times n$ -Matrix hat mit Vielfachheiten gerechnet  $n$  negative Eigenwerte.

Für die Extremstellenbestimmung ergibt sich aus diesen Definitheitskriterien zum Beispiel, dass ein kritischer Punkt nicht mehr als (lokale) Minimumstelle in Frage kommt, wenn die Hesse-Matrix an dieser Stelle einen negativen Diagonaleintrag hat, oder einen negativen Eigenwert, oder irgendeine zur Diagonalen symmetrische Untermatrix mit negativer Determinante. Und der kritische Punkt ist ein Sattelpunkt (also keine lokale Extremstelle), wenn die Hesse-Matrix an dieser Stelle einen positiven und einen negativen Diagonaleintrag hat, oder einen positiven und einen negativen Eigenwert, oder einen positiven Diagonaleintrag und negative Determinante, eben immer wenn die Hesse-Matrix  $A$  im kritischen Punkt *indefinit* ist, d.h. weder positiv noch negativ definit, oder äquivalent:  $u \bullet Au > 0$  gilt für gewisse Vektoren  $u$  und  $v \bullet Av < 0$  für gewisse (andere) Vektoren  $v$ . ■