Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Vorlesungsprogramm für den 24. 05. 2007

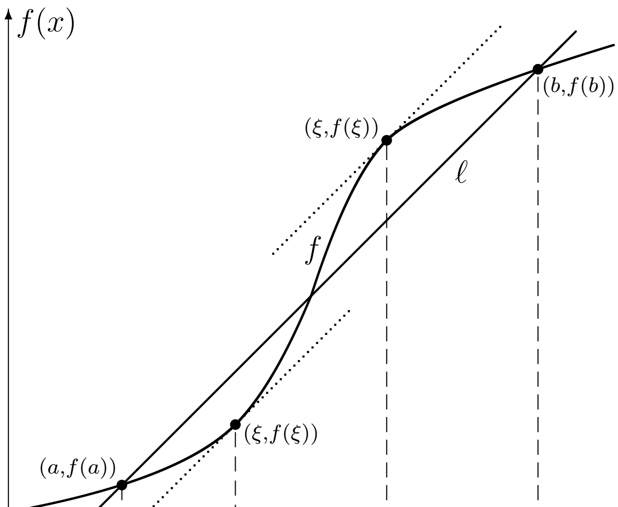
(K. Steffen, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, SS 2007)

4.6 Die Hauptsätze der Differentialrechnung: Schrankensatz, Monotonie und Konvexität

In diesem Abschnitt behandeln wir die nach der Extremstellenbestimmung wichtigsten Anwendungen der Differentialrechnung für die Wirtschaftswissenschaften, nämlich die Analyse von ökonomisch relevanten Eigenschaften einer Funktion $f(x)$ anhand einfach überprüfbarer Eigenschaften ihrer Ableitungsfunktion $f'(x)$ oder der zweiten Ableitung $f''(x)$. Typisches Beispiel ist die Analyse des Monotonieverhaltens bzw. des Konvexitätsverhaltens (progressives bzw. degressives Wachstum oder Abfallen), was für elementare Funktionen, die durch komplizierte Terme gegeben sind, direkt gar nicht möglich ist und auf die einfachere Aufgabe der Vorzeichenbestimmung bei den Werten der ersten bzw. zweiten Ableitung zurückgeführt werden kann.

Alle folgenden mathematischen Resultate ergeben sich aus folgender einfachen Überlegung: Wir betrachten auf einem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (mit $a < b$) eine stetige und im Inneren $]a, b[$ differenzierbare reelle Funktion f und als Vergleichsfunktion die lineare Funktion ℓ mit denselben Werten wie f an den Stellen a und b, also $\ell(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$. Die stetige Differenzfunktion $f - \ell$ hat dann an den Stellen a und b denselben Wert 0 und nimmt daher nach dem Extremalsatz in 4.2 an einer inneren Stelle $x^* \in]a, b[$ ein Maximum an (wenn $f(x) - \ell(x) \geq 0$ an irgendeiner Stelle $x \in]a, b[$) oder an einer inneren Stelle $x_* \in]a, b[$ ein Minimum (wenn $f(x) - \ell(x) \leq 0$ an irgendeiner Stelle $x \in]a, b[$). Aus dem notwendigen Kriterium für Extremstellen 4.5 folgt dann $f'(\xi) - \ell'(\xi) = (f-\ell)'(\xi) = 0$ an dieser Stelle $\xi = x^*$ bzw. $\xi = x_*$.

Da nun die lineare Funktion ℓ die konstante Steigung $\ell' \equiv \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ hat, gilt dann $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, d.h. die (infinitesimale) Steigung der Funktion f an der Stelle ξ ist identisch mit der Steigung der Sehne des Funktionsgraphen über dem Grundintervall $[a, b]$. Geometrisch kann man dieses Ergebnis einsehen, indem man die Sekante des Graphen durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ nach oben bzw. unten verschiebt, bis sie den Graphen "gerade noch berührt". In einem solchen Berührpunkt $(\xi, f(\xi))$ muss dann die Graphensteigung $f'(\xi)$ gleich der Sekantensteigung $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sein.



Man kann diese Argumentation auch ökonomisch formulieren, indem man sich z.B. die gegebene Funktion als Erlösfunktion $f(x) = E(x)$ in Abhängigkeit vom Produktionsoutput x vorstellt und die Vergleichsfunktion als lineare Kostenfunktion $\ell(x) = K(x) = \kappa{\cdot}x{+}K_{\text{fix}}$. Ist $]a, b[$ dann die Gewinnzone, also das maximale Intervall, auf dem die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$ positiv ist, so haben wir $E(a) = K(a)$ und $E(b) = K(b)$, und das Gewinnmaximum wird an einer inneren Stelle x^* erreicht, für die dann $G'(x^*) = 0$ gilt bzw. äquivalent $E'(x^*) = K'(x^*) = \kappa = \frac{K(b)-K(a)}{b-a} = \frac{E(b)-E(a)}{b-a}$. Geometrisch findet man die Stelle x^* maximalen Gewinns, indem man die "Kostengerade" Graph(K) vertikal nach oben verschiebt, bis sie die "Erlöskurve" Graph(E), die in der Gewinnzone $]a, b[$ ja oberhalb der Kostengeraden verläuft, gerade noch in einem Punkt $(x^*, E(x^*))$ berührt. (Oder man denkt sich, dass $f(x) = K(x)$ eine beliebige Kostenfunktion ist und die Erlösfunkton $\ell(x) = E(x) = p \cdot x$ linear bei konstantem Marktpreis p. Dann findet man die Stelle x_* maximalen Gewinns in der Gewinnzone $]a, b[$ durch vertikale Verschiebung der "Erlösgeraden" Graph(E) nach unten, bis sie die "Kostenkurve" Graph(K) in einem Punkt $(x_*, K(x_*))$ noch berührt, und es gilt $K'(x_*) = E'(x_*) = p = \frac{E(b)-E(a)}{b-a} = \frac{K(b)-K(a)}{b-a}$.)

Das Ergebnis der obigen Überlegung ist folgender

SATZ (**Zwischenstellensatz der Differentialrechnung**): *Ist die reelle Funktion $f(x)$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ $(a < b)$ und im Inneren differenzierbar, so gibt es mindestens eine Stelle ξ echt zwischen a und b, in der die Ableitung $f'(\xi)$ mit dem Differenzenquotienten (also der Sehnensteigung) von f zu den Stellen a, b übereinstimmt, also gilt*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \textit{für eine Stelle } \xi \textit{ mit } a < \xi < b\,. \qquad \blacksquare$$

Dieser Satz wird meistens *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* genannt, weil die Stelle ξ zwischen a und b ein "Mittelwert" der Zahlen a und b ist (bei geeigneter Gewichtung des arithmetischen Mittels). Da man jedoch mit "Wert" im Zusammenhang mit einer Funktion f üblicherweise einen Funktionswert $f(\xi)$ meint und nicht eine Stelle ξ im Definitionsintervall, ist diese klassische Terminologie etwas irreführend; denn der Funktionswert $f(\xi)$ spielt im obigen Satz überhaupt keine Rolle. Der Zwischenstellensatz selbst hat keine unmittelbaren ökonomischen Anwendungen, aber er führt auf direktem Wege zum Schrankensatz, Monotoniesatz und Konvexitätssatz, und das sind sehr nützliche Sätze, die es ermöglichen ökonomisch relevante Eigenschaften von elementaren Funktionen oft in einfacher Weise festzustellen. Diese wichtigen Anwendungen des Zwischenstellensatzes bestehen allesamt darin, dass man damit aus Informationen über die Werte der Ableitung f' Rückschlüsse auf die Vorzeichen oder Größe der Differenzenquotienten $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ bzw. der Differenzen $f(b) - f(a)$ der Funktion f erhält. Da die Stelle ξ im obigen Zwischenstellensatz ganz beliebig zwischen a und b liegen kann, muss dazu entsprechende Information über die Werte von f' an *allen* Stellen zwischen a und b vorliegen. Bevor wir zu diesen Anwendungen kommen, erwähnen wir noch folgenden bereits in 4.5 formulierten Spezialfall $f(a) = f(b)$ des Zwischenstellensatzes:

Satz (**von Rolle**): *Ist die reelle Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ $(a < b)$ stetig und im Inneren differenzierbar mit demselben Funktionswert $f(a) = f(b)$ in den Randpunkten, so besitzt die Ableitung f' mindedstens eine Nullstelle ξ echt zwischen a und b.* $\blacksquare$

Das ist klar; denn der obige Zwischenstellensatz liefert in dieser Situation $a < \xi < b$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Die im Beweis gewählte lineare Vergleichsfunktion ℓ ist dann konstant und über der (Extrem-)Stelle ξ hat der Graph von f eine horizontale Tangente.

Da nach dem Satz von Rolle zwischen zwei Lösungen einer Gleichung $f(x) = y$ mindestens eine Nullstelle von f' liegt, erhalten wir als Folgerung:

KOROLLAR: *Ist f eine differenzierbare reelle Funktion auf dem Intervall I und $y \in \mathbb{R}$, so hat Gleichung $f(x) = y$ in I höchstens eine Lösung mehr, als f' Nullstellen im Inneren von I besitzt. Hat f' dort keine Nullstellen, so gibt es als höchstens eine Lösung in I.* ■

Eine erste Anwendung des Zwischenstellensatzes der Differentialrechnung ist der

SATZ (**Konstanzsatz**): *Hat die Funktion f Ableitungswerte $f'(x) = 0$ an allen Stellen x des Intervalls I, so ist f konstant auf I.* ■

Das Umgekehrte gilt natürlich auch: Konstante Funktionen haben überall Ableitung Null. Der Konstanzsatz ist intuitiv sehr einleuchtend, wenn man $f'(x)$ als Änderungsrate der Funktion f an der Stelle x interpretiert: "Wenn f überall die Änderungsrate Null hat, so ändern sich eben die Funktionswerte nicht beim Durchlaufen des Definitionsintervalls." Bei genauerer Betrachtung ist die Aussage aber so selbstverständlich nicht; denn die Ableitungswerte $f'(x)$ sind "infinitesimale" Größen (Grenzwerte von Differenzenquotienten), die nur von den Funktionswerten an Stellen beliebig nahe bei x abhängen, die Schlußfolgerung $f(a) = f(b)$ für alle $a, b \in I$ ist aber eine "globale" Aussage, die auch für Stellen a, b gilt, die weit auseinander liegen. Die Mathematiker verlangen daher einen Beweis des Konstanzsatzes, und der ist mit dem Zwischenstellensatz der Differentialrechnung einfach zu führen: Ist $a < b$ in I, so gilt $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ für eine Stelle ξ zwischen a und b, also jedenfalls $\xi \in I$ (da I ein Intervall ist — sonst gilt der Konstanzsatz auch nicht, wie z.B. die auf $\mathbb{R}_{\neq 0}$ nicht konstante Vorzeichenfunktion $\operatorname{sign}(x)$ mit Ableitung Null überall auf $\mathbb{R}_{\neq 0}$ zeigt). Da nun nach Voraussetzung $f'(x) = 0$ ist an allen Stellen $x \in I$, also auch $f'(\xi) = 0$, folgt $f(b) - f(a) = 0$, und weil $a < b$ zwei beliebige Stellen im Intervall I waren, bedeutet das natürlich die Konstanz der Funktion f auf I.

BEISPIELE (***Anwendungen des Konstanzsatzes***):

(1) Eine reelle Funktion F heißt eine **Stammfunktion** (oder *Antiableitung*) zu der Funktion f auf einem Intervall I, wenn f die Ableitungsfunktion von F ist, also $f(x) = F'(x)$ für alle $x \in I$. Es gilt:

- *Zwei Stammfunktionen zu f auf einem Intervall I unterscheiden sich nur um eine Konstante.*

Ist nämlich F eine Stammfunktion und $\widetilde{F}$ eine andere, so gilt $(F - \widetilde{F})'(x) = F'(x) - \widetilde{F}'(x) = f(x) - f(x) = 0$ für alle $x \in I$, also ist $F - \widetilde{F}$ konstant auf I. Damit ist übrigens noch nicht gesagt, dass es zu einer gegebenen Funktion f immer Stammfunktionen gibt, aber mit Integralrechnung kann gezeigt werden, dass Stammfunktionen jedenfalls dann existieren, wenn f stetig ist. (Allerdings gibt es — anders als beim Differenzieren — nicht unbedingt eine elementare Formel, die eine Stammfunktion darstellt, selbst wenn f eine elementare Funktion ist.)

(2) Affin lineare Funktionen $f(x) = cx + d$ haben ihre Steigung c als Ableitung an allen Stellen, die Ableitungsfunktion $f' \equiv c$ ist also konstant. Mit dem Konstanzsatz kann kann man auch das Umgekehrte sehen:

- *Hat die reelle Funktion f eine konstante Ableitungsfunktion auf dem Intervall I, so ist f selbst affin linear auf I.*

Gilt nämlich $f'(x) = c$ für alle $x \in I$, so folgt $\frac{d}{dx}(f(x) - cx) = f'(x) - c = 0$ für alle $x \in I$, also ist $f(x) - cx \equiv d$ konstant auf I und $f(x) = cx + d$ für alle $x \in I$.

(3) Das kann man auf Polynomfunktionen von höherem Grad wie folgt verallgemeinern:

- *Genau dann ist eine reelle Funktion f eine Polynomfunkton vom Grad $\leq n$ auf dem Intervall I, wenn die $(n+1)$–te Ableitung $f^{(n+1)}$ überall Null ist auf I.*

Dass Polynome vom Grad $n \geq 1$ ein Polynom vom Grad $n-1$ als Ableitung und folglich die Nullfunktion als $(n+1)$–te Ableitung haben, wissen wir schon aus 4.3. Ist umgekehrt $f^{(n+1)} \equiv 0$ auf I, also $(f^{(n)})' \equiv 0$, so ist $f^{(n)}(x) \equiv c$ konstant gemäß (1) und $g(x) := f(x) - \frac{c}{n!}x^n$ hat dann n–te Ableitung Null überall auf I. Da wir die zu beweisende Aussage mit $n-1$ statt n schon als gültig annehmen können (Induktionsannahme), ist folglich g eine Polynomfunktion vom Grad $\leq n-1$ und daher f eine vom Grad $\leq n$.

(4) Eine positive differenzierbare Funktion f heißt **isoelastische Funktion** auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}_{>0}$, wenn die Elastizität $\varepsilon_f(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$ an allen Stellen $x \in I$ dieselbe ist, d.h. wenn die Elastizitätsfunkton ε_f konstant auf I. Hierfür liefert der Konstanzsatz:

- *Die isoelastischen Funktionen auf $I \subset \mathbb{R}_{>0}$ sind genau die Vielfachen von Potenzfunktionen $f(x) = a \cdot x^s$ $(s \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_{>0})$.*

Dass solche Funktionen konstante Elastizität $\varepsilon_f \equiv s$ haben, wurde in 4.4 schon ausgerechnet. Ist umgekehrt $\varepsilon_f \equiv s$ konstant, also $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{s}{x}$, so folgt $\frac{d}{dx}\ln(\frac{f(x)}{x^s}) = \frac{d}{dx}(\ln f(x) - s\ln x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{s}{x} = 0$ für $x \in I$, also ist $\ln\frac{f(x)}{x^s}$ und damit auch $\frac{f(x)}{x^s}$ selbst konstant auf I, d.h. $f(x) = a \cdot x^s$ mit einer Konstanten a (die positiv ist wegen $f > 0$).

(5) Ganz analog sieht man:

- *Die positiven Funktionen f auf $I \subset \mathbb{R}_{>0}$ mit homogen linearer Elastizitätsfunktion $\varepsilon_f(x) = cx$ sind genau die Vielfachen von Exponentialfunktionen $f(x) = a \cdot \mathrm{e}^{cx}$ $(c \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_{>0})$.*

Man berechnet nämlich $\varepsilon_{a\mathrm{e}^{cx},x} = cx$ und umgekehrt folgt aus $\varepsilon_f(x) = cx$, dass $\frac{f'(x)}{f(x)} = cx$, also $\frac{d}{dx}\ln(f(x)) \equiv c$ konstant ist. Gemäß (1) ist dann $\ln(f(x)) = cx + d$ affin linear, d.h. $f(x) = a\mathrm{e}^{cx}$ mit einem konstanten Faktor $a = \mathrm{e}^d > 0$. In derselben Weise kann man alle Funktionen f bestimmen, deren Elastizitätsfunktion affin linear, quadratisch oder allgemein eine Polynomfunktion $p(x) = c_nx^n + \ldots + c_1x + c_0$ vom Grad n ist, also $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x}p(x)$ erfüllt. Man findet dann, dass $\ln(f(x)) - c_0\ln x$ dieselbe Ableitung hat wie $q(x) = \frac{1}{n}ac_nx^n + \ldots + \frac{1}{2}c_2x^2 + c_1x$ und schließt $f(x) = ax^{c_0}\mathrm{e}^{q(x)}$ mit einem Polynom q vom Grad n, und umgekehrt haben derart aufgebaute Funktionen das Polynom $xq'(x) + c_0$ vom Grad n als Elastizitätsfunktion.

(6) Ähnlich wie (5) kann man Folgendes sehen:

- *Die Lösungen der Differentialgleichung des ungehemmten Wachstums $f'(t) = cf(t)$ auf einem Intervall I sind genau die Vielfachen $f(t) = a \cdot \mathrm{e}^{ct}$ der Exponentialfunktion mit Basis e^c (und $a \in \mathbb{R}$).*

Von "ungehemmtem Wachstum" spricht man genau genommen nur im Fall $c > 0$; die Differentialgleichung besagt dann für positive Funktionen f, dass die Wachstumsrate $f'(t)$ des "Bestands" $f(t)$ zu jedem Zeitpunkt t proportional zur Bestandsgröße ist mit einem konstanten Proportionalitätsfaktor $c > 0$. Im Fall $c < 0$ ist die Änderungsrate dagegen negativ, der Bestand also abnehmend, wobei die Abnahmerate $f'(t) = cf(t)$ wiederum proportional zum Bestand ist; man spricht dann von einem Prozess "ungehemmten Zerfalls". (Im Fall $c = 0$ besagt die Differentialgleichung einfach, dass $f' \equiv 0$, also $f \equiv a$ konstant ist.) Wegen $\frac{d}{dt}(a\mathrm{e}^{ct}) = ca\mathrm{e}^{ct}$ sind die angegebenen Funktionen jedenfalls Lösungen der Differentialgleichung. Ist umgekehrt $f(t)$ eine beliebige Lösung, so folgt $\frac{d}{dt}(f(t)\mathrm{e}^{-ct}) = f'(t)\mathrm{e}^{-ct} + f(t)(-c)\mathrm{e}^{-ct} = cf(t)\mathrm{e}^{-ct} - cf(t)\mathrm{e}^{-ct} = 0$, also ist $f(t)\mathrm{e}^{-ct} \equiv a$ konstant nach dem Konstanzsatz und somit $f(t) = a\mathrm{e}^{ct}$ wie behauptet.

(7) In den Wirtschaftswissenschaften wird häufig der Wert $f'(a)$ der Marginalfunktion f' zu f mit dem Wert der Differenzenquotienten $\frac{1}{h}[f(a+h) - f(a)] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gleichgesetzt, wenn der Zuwachs $h = b-a$ relativ klein ist (etwa $h = 1$ und a groß). Der Zwischenstellensatz sagt aber, dass dieser Differenzenquotient genau gleich dem Ableitungswert $f'(\xi)$ an einer Stelle zwischen a und $b = a+h$ ist. Nur wenn die Ableitungswerte auf dem Intervall $[a, b]$ höchstens innerhalb einer akzeptablen Fehlertoleranz $\delta > 0$ schwanken, ist also die Gleichsetzung von $f'(a)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ mit tolerierbarem Fehler $\leq \delta$ erlaubt! Das Argument zeigt für die Ersetzung einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ durch ihre Linearisierung $\ell(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ zu einer Stelle $a \in I$ ganz allgemein folgende **Abschätzung des Linearisierungsfehlers**:

$$|f(x) - \ell(x)| \leq \delta|x - a| \quad \text{für } x \in I, \text{ wenn } \quad |f'(\xi) - f'(a)| \leq \delta \text{ für alle } \xi \in I\,. \qquad \blacksquare$$

SATZ (**Schrankensatz**): *Ist f eine differenzierbare reelle Funktion auf einem Intervall I und liegen die Werte der Ableitung f' auf I zwischen den Schranken m und M, d.h. $m \leq f'(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so gilt:*

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a) \quad \text{für alle } \; a < b \; \text{ in } I\,.$$

Hat man nur eine untere Schranke m bzw. nur eine obere Schranke M für die Ableitungswerte auf I, so folgt entsprechend nur die erste bzw. nur die zweite Ungleichung. Der *Beweis* mit dem Zwischenstellensatz der Differentialrechnung ist einfach: Es gilt ja $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ für eine Stelle ξ zwischen a und b, und die Voraussetzung über die Ableitungswerte besagt $m \leq f'(\xi) \leq M$.

DISKUSSION: **1)** Die Bedeutung des Satzes für Anwendungen ist folgende:

- *Aus Schranken für die Ableitung erhält man Schranken für die Differenz von Funktionswerten.*

Im Gegensatz zu der nur für kleine Werte von $|x-a|$ gültigen Zuwachsformel $f(x)-f(a) \approx f'(a)(x - a)$ gibt der Schrankensatz *exakt gültige untere und obere Schranken* für die Differenz $f(x) - f(a)$ der Funktionswerte, wenn man für die Ableitung f' auf dem Intervall zwischen a und x eine untere Schranke m und eine obere Schranke M kennt (z.B. das Minimum und das Maximum von f' auf diesem oder einem größeren Intervall).

2) Aus einer Schranke L für den Betrag der Ableitung, d.h. $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in I$, folgt $-L \leq f'(x) \leq L$ und mit dem Schrankensatz daher $-L(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq L(b-a)$, also

$$|f(b) - f(a)| \leq L|b-a| \quad \text{für alle } a, b \in I \quad (\text{wenn } |f'| \leq L \text{ auf } I).$$

Funktionen mit dieser Eigenschaft heißen bekanntlich (siehe 4.2) **dehnungsbeschränkt** auf dem Intervall I mit **Dehnungsschranke** L (auch *Lipschitz–Konstante* genannt), weil Anwendung der Funktion f auf zwei Argumente $\widetilde{x}, x$ deren Abstand höchstens um den Faktor L "dehnt" (wenn $L > 1$ ist; im Fall $0 \leq L < 1$ wird der Abstand der Argumente durch Anwendung von f mindestens um den Faktor L gestaucht). Die kleinstmögliche Schranke für $|f'|$ auf I ist das Supremum $\sup_I |f'|$, wenn endlich (gleich dem Maximum von $|f'|$ auf I, wenn $|f'|$ auf I ein Maximum annimmt). Dieses Supremum ist also eine Dehnungsschranke für f, und zwar die bestmögliche, wie man daran sieht, dass jede kleinere Zahl durch einen Ableitungsbetragswert $|f'(x)|$ mit $x \in I$ und daher auch durch den Betrag von Differenzenquotienten $|\frac{f(\widetilde{x})-f(x)}{\widetilde{x}-x}|$ mit $\widetilde{x}$ nahe bei x übertroffen wird. Wir halten fest:

- *Eine differenzierbare reelle Funktion f ist genau dann dehnungsbeschränkt auf einem Intervall I, wenn ihr Betrag $|f'|$ beschränkt ist auf I; in diesem Falle ist das Supremum $\sup_I |f'|$ die kleinstmögliche Dehnungsschranke.* ■

BEISPIELE (***Anwendungen des Schrankensatzes***):

(1) Für $0 \leq a < x \leq b$ und $s \geq 1$ gilt $sa^{s-1} \leq sx^{s-1} = \frac{d}{dx}x^s \leq sb^{s-1}$, also liefert der Schrankensatz für die Differenz von Werten der Potenzfunktion x^s:

$$sa^{s-1}(b-a) \leq b^s - a^s \leq sb^{s-1}(b-a) \qquad (s \geq 1),$$

und sb^{s-1} ist die kleinstmögliche Dehnungsschranke für x^s auf $[a, b] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. Auf unbeschränkten Intervallen $[a, \infty[$ ist die Potenzfunktion x^s mit $s > 1$ nicht dehnungsbeschränkt, weil die Ableitung sx^{s-1} beliebig große Werte annimmt. Für $0 < a \leq x \leq b$ und $0 < s < 1$ (Wurzelfunktionen x^s) gilt dagegen $sb^{s-1} \leq sx^{s-1} = \frac{d}{dx}x^s \leq sa^{s-1}$ und daher

$$sb^{s-1}(b-a) \leq b^s - a^s \leq sa^{s-1}(b-a) \qquad (0 < s < 1),$$

und nun ist sa^{s-1} die kleinste Dehnungsschranke auf $[a, \infty[\subset \mathbb{R}_{>0}$, während es auf Intervallen $[0, b]$ mit $b > 0$ keine Dehnungsschranke gibt. Für $s < 0$ und $0 < a \leq x \leq b$ gelten die Ungleichungen wieder umgekehrt, bzw. $|s|b^{s-1}(b-a) \leq a^s - b^s \leq |s|a^{s-1}(b-a)$. Die optimale Dehnungsschranke auf $[a, \infty[$ ist dann $|s|a^{s-1}$ und auf $]0, b]$ ist x^s für $s < 0$ nicht dehnungsbeschränkt. Die einzigen auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$ dehnungsbeschränkten Potenzfunktionen sind folglich $x^0 \equiv 1$ (mit Dehnungsschranke 0) und x (mit Dehnungsschranke 1).

(2) Für $a \leq x \leq b$ hat man $\mathrm{e}^a \leq \mathrm{e}^x = \frac{d}{dx}\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^b$, also gibt der Schrankensatz

$$\mathrm{e}^a(b-a) \leq \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a \leq \mathrm{e}^b(b-a),$$

und e^b ist die kleinstmögliche Dehnungsschranke der natürlichen Exponentialfunktion auf jedem Intervall $[a, b]$ und auf $]-\infty, b]$.

(3) Die Funktionen $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{x}{1+x^2}$, $\sin x$, $\cos x$, $\tanh x$, $\arctan x$ (die Umkehrfunktion zu $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ auf $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$) haben alle $|f'(x)| \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}$ (nämlich $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\cos x$, $-\sin x$, $\frac{1}{\cosh^2 x}$, $\frac{1}{1+x^2}$), also sind all diese Funktionen dehnungsbeschränkt auf ganz $\mathbb{R}$ mit Dehnungsschranke 1, d.h. $|f(b) - f(a)| \leq |b-a|$ gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$. ■

SATZ (**Monotoniesatz**): *Eine auf einem Intervall I differenzierbare reelle Funktion f ist genau dann monoton nichtfallend, wenn $f' \geq 0$ ist überall auf I, und genau dann monoton nichtwachsend, wenn $f' \leq 0$ überall auf I. Dabei besteht strenge Monotonie, genau wenn f' auf keinem Teilintervall positiver Länge überall verschwindet.*

Auch dieser wichtige Satz ist intuitiv sehr einleuchtend: Schwach monotones Wachstum bedeutet dasselbe wie eine nichtnegative Änderungsrate an jeder Stelle. Der *Beweis* mit Hilfe des Zwischenstellensatzes ist auch ganz einfach: Wenn z.B. $f' \geq 0$ ist auf I, so gilt $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \geq 0$ für alle $a < b$ in I, also $f(a) < f(b)$. Dabei ist f genau dann nicht streng wachsend, wenn f auf einem Intervall positiver Länge konstant ist, wenn also f' auf einem solchen Intervall verschwindet. Umgekehrt sind für nichtfallende f offenbar alle Differenzenquotienten $\frac{f(\widetilde{x})-f(x)}{\widetilde{x}-x} \geq 0$ und damit auch ihr Limes $f'(x)$ bei $\widetilde{x} \to x$.

DISKUSSION: **1)** Der Nutzen des Monotoniesatzes besteht natürlich darin, dass *man das Vorzeichen der Ableitung oft leichter bestimmen kann als direkt das Monotonieverhalten* einer vorgelegten elementaren Funktion $f(x)$ durch Analyse, ob der Rechenterm $f(x)$ seinen Wert vergrößert oder verkleinert bei Vergrößerung von x.

2) Eine Folgerung aus dem Monotoniesatz ist:

- *Gilt $f' > 0$ überall auf I, so ist f streng wachsend auf I.*

Aber eine Warnung ist angebracht: *Die Umkehrung hierzu gilt nicht*, d.h. wenn f streng wachsend ist, so muss die Ableitung nicht überall positiv sein, sondern kann auch Nullstellen haben. Einfachstes Beispiel ist die auf $\mathbb{R}$ streng wachsende Funktion $f(x) = x^3$ mit $f'(0) = 3x^2\big|_{x=0} = 0$. Alles was man über die Ableitung einer streng wachsenden Funktion generell aussagen kann, ist eben, dass sie *beinahe überall positiv* ist, d.h. positiv abgesehen von möglichen Nullstellen, die aber kein Teilintervall ganz ausfüllen können (kein Teilintervall positiver Länge, genauer gesagt). In der Wirtschaftsmathematik wird "streng monotones Wachstum" aber dennoch oft als Synonym für "positive Ableitung" verwendet. Das ist gerechtfertigt, weil man die mathematischen Funktionen, die ökonomische Vorgänge modellieren, ohnehin nicht genau kennt und weil eine nichtfallende Funktion $f(x)$ durch Addition einer beliebig kleinen Funktion mit positiver Ableitung (etwa $\varepsilon \tanh x$ mit Betrag $< \varepsilon$ und Ableitungswert in $]0, \varepsilon]$ an jeder Stelle) in eine Funktion mit überall positiver Ableitung verwandelt werden kann. ■

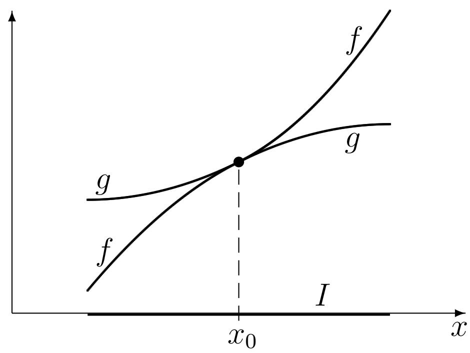
Eng mit dem Monotoniesatz verwandt ist ein Vergleichssatz für zwei Funktionen, der sich anwenden lässt, wenn man die Werte ihrer Ableitung der Größe nach vergleichen kann.

SATZ (**Vergleichssatz**)*: Sind f und g differenzierbare Funktionen auf I mit $f' \geq g'$ auf I und $f(x_0) = g(x_0)$ an einer Stelle $x_0 \in I$, so gilt:*

$$f(x) \geq g(x) \quad \textit{für} \quad x_0 < x \quad \textit{in } I$$

und

$$f(x) \leq g(x) \quad \textit{für} \quad x_0 > x \quad \textit{in } I.$$



Genauer gilt sogar, dass $f - g$ auf I monoton nichtfallend ist (wegen $(f-g)' = f' - g' \geq 0$ auf I), so dass die Behauptung sofort aus $f(x_0) - g(x_0) = 0$ folgt. Anschaulich sagt der Satz, dass die schneller wachsende Funktion auch größere Werte rechts von einer Stelle hat, an der beide Funktionen übereinstimmen. (Man beachte aber, dass die schneller wachsende Funktion links von dieser Stelle *kleinere* Funktionswerte hat!)

DISKUSSION: **(1)** *Strenge Ungleichung* $f(x) > g(x)$ für $x_0 < x$ in I bzw. $f(x) < g(x)$ für $x_0 > x$ in I tritt im Vergleichssatz genau dann ein, wenn an mindestens einer Stelle ξ zwischen den Punkten x_0 und x (die beiden Punkte eingeschlossen) $f'(\xi) > g'(\xi)$ ist (und sonst überall $f' \geq g'$). Andernfalls ist nämlich $f' = g'$ auf diesem Intervall also $f - g$ darauf konstant, und wegen $f(x_0) - g(x_0) = 0$ muss die Konstante Null sein, also $f = g$ auf diesem Intervall; wegen der Monotonie von $f - g$ auf I ist Konstanz von $f - g$ auf dem Intervall zwischen x_0 und x aber äquivalent mit $f(x) = g(x)$.

2) Für die erste Ungleichung $f(x) \geq g(x)$, wenn $x_0 < x$ in I, genügt als Voraussetzung, dass $f' \geq g'$ ist rechts von x_0 und $f(x_0) \geq g(x_0)$. Strenge Ungleichung $f(x) > g(x)$ tritt dabei genau dann ein, wenn schon $f(x_0) > g(x_0)$ ist oder wenn $f'(\xi) > g'(\xi)$ gilt an mindestens einer Stelle ξ zwischen x_0 und x. Für die zweite Ungleichung $f(x) \leq g(x)$, wenn $x_0 > x$ in I, reicht entsprechend, dass $f' \geq g'$ ist links von x_0 und $f(x_0) \leq g(x_0)$. Strenge Ungleichung $f(x) < g(x)$ tritt genau dann ein, wenn $f(x_0) < g(x_0)$ oder wenn $f'(\xi) > g'(\xi)$ gilt an mindestens einer Stelle ξ zwischen x_0 und x. ■

BEISPIELE (***Anwendungen von Monotonie– und Vergleichssatz***):

(1) Die *Potenzfunktion* $f(x) = x^s$ hat für $s > 0$ positive Ableitung $f'(x) = sx^{s-1}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$, für $s < 0$ dagegen negative Ableitung. Also ist x^s streng wachsend auf $\mathbb{R}_{>0}$ (und sogar auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$) für $s > 0$, dagegen streng fallend auf $\mathbb{R}_{>0}$ für $s < 0$.

Vergleichen wir $f(x)$ mit der linearen Funktion $g(x) = 1 + s(x-1)$, so haben wir $f(1) = 1 = g(1)$ und $f'(x) = sx^{s-1} > s = g'(x)$ für $x > 1, s > 1$ oder $x > 1, s < 0$ oder $0 < x < 1, 0 < s < 1$, aber die umgekehrte Ungleichung $f'(x) < g'(x)$ für $x > 1, 0 < s < 1$ oder $0 < x < 1, s \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$. Der Vergleichssatz gibt damit die **Bernoulli–Ungleichungen** (siehe 1.4)

$$x^s > 1 + s(x-1) \quad \text{für} \quad 0 < x \neq 1 \quad \text{und} \quad s < 0 \ \text{ oder } \ s > 1\,,$$
$$x^s < 1 + s(x-1) \quad \text{für} \quad 0 < x \neq 1 \quad \text{und} \quad 0 < s < 1\,.$$

Der Graph von g ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1,1)$, also besagen die Ungleichungen geometrisch, dass der Graph der Potenzfunktion x^s für $0 < s < 1$ unter und für $s < 0$ oder $s > 1$ über dieser Tangente verläuft (siehe die Abb. in 1.4).

(2) Die natürliche *Exponentialfunktion* $f(x) = \mathrm{e}^x$ hat Ableitung $f'(x) = \mathrm{e}^x > 0$ auf $\mathbb{R}$, ist also streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ (wie aus 1.4 bekannt). Vergleichen wir hier mit der linearen Funktion $g(x) = 1 + x$ mit $g(0) = 1 = f(0)$, so haben wir $f'(x) = \mathrm{e}^x > 1 = g(x)$ für $x > 0$ und $f'(x) = \mathrm{e}^x < 1 = g(x)$ für $x < 0$, also gibt der Vergleichssatz die aus 1.4 bekannte **fundamentale Ungleichung für die Exponentialfunktion**

$$\mathrm{e}^x > 1 + x \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}_{\neq 0}\,.$$

Auch diese Ungleichung drückt aus, dass der Graph der Exponentialfunktion über seiner Tangente im Punkt $(0,1)$ verläuft (siehe die Abbildung in 1.4).

(3) Die natürliche *Logarithmusfunktion* $f(x) = \ln x$ hat $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ auf $\mathbb{R}_{>0}$, also ist sie streng wachsend auf $\mathbb{R}_{>0}$. Wir vergleichen mit $g(x) = 1 - x$ und $h(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Es gilt $f(1) = 0 = g(1) = h(1)$ und $f'(x) = \frac{1}{x} < 1 = g'(x)$ sowie $f'(x) > \frac{1}{x^2} = h'(x)$ für $x > 1$, dagegen $g'(x) < f'(x) < h'(x)$ für $0 < x < 1$. Der Vergleichssatz liefert damit die aus 1.4 bekannten **fundamentalen Ungleichungen für die Logarithmusfunktion**

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1 \quad \text{für} \quad 0 < x \neq 1\,.$$

Die zweite Unleichung bedeutet hier geometrisch, dass der Graph der Logarithmusfunktion unter seiner Tangente im Punkt $(1, 0)$ verläuft (was sich aus (2) durch Spiegelung an der Diagonalen, also durch Übergang zur Umkehrfunktion, ergibt; siehe die Abbildung in 1.4).

(4) Bei vielen *ökonomischen Funktionen* $f(x)$ ist eine Vorzeichenannahme $f' > 0$ bzw. $f' < 0$ für die Grenzfunktion auf dem ökonomisch sinnvollen Definitionsintervall natürlich (z.B. $K' > 0$ bei Kostenfunktionen $K(x)$ des produzierten Output x oder $x' < 0$ bei Nachfragefunktionen $x(p)$ des Preises usw.). Solche Funktionen sind dann streng monoton wachsend bzw. fallend (die Kosten nehmen zu bei Vergrößerung des Output, die Nachfrage nimmt ab bei Erhöhung des Preises, usw.). Mathematisch gesehen ist, wie oben bemerkt, eine Vorzeichenbedingung $f' > 0$ bzw. $f' < 0$ eine etwas stärkere Annahme als nur strenges Wachstum bzw. strenges Fallen der Funktion f; denn auch unter der Voraussetzung $f' \geq 0$ ist z.B. f streng wachsend, solange f' auf keinem ganzen Intervall positiver Länge verschwindet. Da man aber ökonomische Funktionen im Allgemeinen nicht genau kennt, darf man statt strenger Monotonie auch gleich die etwas stärkere Bedingung $f' > 0$ überall bzw. $f' < 0$ überall annehmen auf dem ökonomisch sinvollen Definitionsintervall. Dies hat gewisse Vorteile (z.B. wenn durch f' dividiert werden muss).

(5) Wir kommen auf die in 4.2 (bei den Beispielen ökonomischer Funktionen) und 4.3 (bei den Beispielen zur Quotientenregel) schon diskutierten *Konsumfunktionen* $C(Y) \geq 0$ und *Sparfunktionen* $S(Y) = Y - C(Y)$ des Einkommens $Y > 0$ zurück, für die folgenden empirischen **Gesetze von Keynes** gelten:

(i) $C'(Y) > 0$, der *Grenzhang zum Konsum* (die *marginale Konsumquote*) ist positiv;

(ii) $S'(Y) > 0$, die *marginale Sparquote* (die *Grenzneigung zum Sparen*) ist auch positiv;

(iii) $\dfrac{d}{dY}\dfrac{C(Y)}{Y} < 0$, die *marginale durchschnittliche Konsumquote* ist negativ;

(iv) die marginale Konsumquote $C'(Y)$ ist nichtwachsend und daher die marginale Sparquote $S'(Y) = 1 - C'(Y)$ nichtfallend.

Wir sehen, dass (i) und (ii) im Wesentlichen nur das streng monotone Wachstum von Konsum– und Sparquote aussagen, und diese Annahmen sind sehr einleuchtend (bei wachsendem Einkommen wird mehr konsumiert und auch mehr gespart). Ebenso ist (iii) plausibel: Mit wachsendem Einkommen wird ein größerer Prozentsatz des Einkommens gespart, d.h. die durchschnittliche Sparquote $\frac{S(Y)}{Y}$ wächst, oder äquivalent: die durchschnittliche Konsumquote $\frac{C(Y)}{Y} = \frac{Y-S(Y)}{Y} = 1 - \frac{S(Y)}{Y}$ fällt. Die Bedingung (iv) ist eine Verschärfung von (iii) und besagt ja auch etwas Ähnliches: Das Wachstums des Konsums ist degressiv, mit mit wachsendem Einkommen verlangsamt sich also die Steigerungsrate des Konsums. Daraus folgt (iii), weil $\frac{d}{dY}\frac{C(Y)}{Y} = \frac{YC'(Y)-C(Y)}{Y} = \frac{1}{Y}[C'(Y) - \frac{C(Y)}{Y}]$ ist und weil nach dem Zwischenstellensatz $\frac{C(Y)}{Y} \geq \frac{C(Y)-C(0)}{Y-0} = C'(\eta)$ ist für ein $\eta \in]0, Y[$ sowie $C'(\eta) > C'(Y)$ wegen der Monotoniebedingung (iv), wenn man dort streng monotones Fallen von C' fordert. Dann ist (iii) also eine redundante Bedingung. Aus dieser Berechnung von $\frac{C(Y)}{Y}$ mit der Quotientenregel sieht man übrigens auch, wie schon in 4.3, dass die Bedingung (iii) äquivalent ist zu $C'(Y) < \frac{C(Y)}{Y}$, was in ökonomischer Terminologie besagt, dass *der Grenzhang zum Konsum kleiner ist als die durchschnittliche Konsumquote.*

Mathematische Konsequenzen der Bedingungen (i) – (iv) sind z.B. folgende: Es gilt $C(Y) > 0$ für alle $Y > 0$ (weil $C(0) \geq 0$ ist und C streng wachsend; "Konsum auf Pump", also $C(0) > 0$ oder $C(Y) > Y$ für gewisse $Y > 0$ wird übrigens hier nicht ausgeschlossen). Andererseits gilt gemäß Vergleichssatz $C(Y) < Y + C(0)$ für alle $Y > 0$ (weil für $Y = 0$ Gleichheit eintritt und weil $C'(Y) = 1 - S'(Y) < 1 = \frac{d}{dY}(Y + C(Y))$ ist). Da aus (iv) insbesondere $C'(Y) \leq C'(0) < 1$ für $Y > 0$ folgt, ist wiederum gemäß Vergleichssatz $C(Y) \leq C'(0) \cdot Y + C(0) = Y + C(0) + (C'(0) - 1)Y$, so dass bei Einkommen $Y > \frac{C(0)}{1-C'(0)}$ sicher $C(Y) < Y$ ausfällt, d.h. weniger als das gesamte Einkommen konsumiert wird.

Durch die Bedingungen (i) – (iv) ist aber die Konsumfunktion nicht einmal qualitativ festgelegt. Ein wichtiger Punkt, der verschiedene Ansätze für Konsumfunktionen in qualitativer Hinsicht unterscheidet, ist z.B. noch das Verhalten von $C'(Y)$ bei $Y \to \infty$. Wegen des monotonen Wachstums von $C'(Y)$ und der Schranke $C'(Y) \leq 1$ existiert dieser Limes und liegt in $[0, 1[$. Im Fall $\lim_{Y\to\infty} C'(Y) = d > 0$ gilt $C'(Y) \geq d > 0$ für alle Y, also nach dem Vergleichssatz $C(Y) \geq C(0) + dY \to \infty$ bei $Y \to \infty$, d.h. die Konsumquote wächst mit wachsendem Einkommen über alle Grenzen, und zwar so schnell wie ein fester Prozentsatz des Einkommens. Im Fall $\lim_{Y\to\infty} C'(Y) = 0$, in dem von Zusatzeinkommen, die zu einem sehr großen Einkommen hinzukommen, fast nichts mehr konsumiert und fast alles gespart wird, sind dagegen noch beide Möglichkeiten offen: Die Konsumquote $C(Y)$ kann dann bei $Y \to \infty$ einen endlichen Limes haben (maximal möglicher Konsum eines Haushalts) oder sie kann über alle Schranken wachsen — es kommt in diesem Fall eben darauf an, *wie schnell* $C'(Y)$ gegen Null strebt bei $Y \to \infty$.

Elementare Ansätze für Konsumfunktionen, die den Gesetzen (i) – (iv) genügen, sind z.B.

$$C(Y) = a(Y+b)^s + c \quad \text{mit} \quad 0 < s < 1,\ a, b > 0,\ asb^{s-1} < 1,\ c \geq 0;$$
$$\text{hier ist} \quad \lim_{Y\to\infty} C(Y) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{Y\to\infty} C'(Y) = \lim_{Y\to\infty} as(Y+b)^{s-1} = 0;$$

$$C(Y) = \frac{aY}{Y+b} + c \quad \text{mit} \quad a, b > 0,\ \frac{a}{b} < 1,\ c \geq 0;$$
$$\text{hier ist} \quad \lim_{Y\to\infty} C(Y) = a + c \quad \text{und} \quad \lim_{Y\to\infty} C'(Y) = 0;$$

$$C(Y) = \frac{aY}{Y+b} + c + dY \quad \text{mit} \quad b, d > 0,\ a, c \geq 0,\ \frac{a}{b} + d < 1;$$
$$\text{hier ist} \quad \lim_{Y\to\infty} C(Y) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{Y\to\infty} C'(Y) = d;$$

$$C(Y) = a - b\mathrm{e}^{-cY} \quad \text{mit} \quad a \geq b > 0,\ c > 0,\ b \cdot c < 1;$$
$$\text{hier ist} \quad \lim_{Y\to\infty} C(Y) = a \quad \text{und} \quad \lim_{Y\to\infty} C'(Y) = 0.$$

Diese Konsumfunktionen können durch Wahl der Parameter a, b, c, d noch qualitativ und quantitativ weiteren Bedingungen angepasst werden. Es erscheint ausgeschlossen, aufgrund empirischer Daten entscheiden zu können, welche der angegebenen (und weiterer hier nicht angegebenen) Ansätze für eine Konsumfunktion der "richtige" ist. Wie in vielen Beispielen der Mathematisierung von realen Problemen ist es auch bei ökonomischen Aufgabenstellungen so, dass die Parameter nicht genau bekannt sind, ja dass nicht einmal der Funktionstyp festliegt. Die ökonomische Situation gibt uns nur einige qualitative Funktionsmerkmale in die Hand wie z.B. Vorzeichen, Schranken und Monotoniebedingungen für die Ableitung der betrachteten Funktion. Es ist daher wichtig, mathematische Sätze zu haben, mit denen aus Informationen dieser Art über die Ableitung auf den Verlauf der Funktion selbst geschlossen werden kann, auch wenn die Funktion nicht durch eine explizite Formel mit festgelegten Parameterwerten gegeben ist. *Genau darin besteht die Bedeutung der Hauptsätze der Differentialrechnung für die Wirtschaftswissenschaft.* ■

SATZ (**Konvexitätssatz**): **(i)** *Eine differenzierbare Funktion* $f : I \to \mathbb{R}$ *ist genau dann [streng] konvex auf dem Intervall* I*, wenn die Ableitung* f' *[streng] monoton wachsend ist auf* I*, und genau dann [streng] konkav, wenn* f' *[streng] monoton fallend ist auf* I*.*

(ii) *Eine zweimal differenzierbare Funktion* $f : I \to \mathbb{R}$ *ist genau dann konvex auf dem Intervall* I*, wenn für ihre zweite Ableitung gilt* $f'' \geq 0$ *auf* I*, und genau dann konkav, wenn* $f'' \leq 0$ *ist auf* I*; die Konvexität bzw. Konkavität ist dabei streng, genau wenn* f'' *beinahe überall positiv ist auf* I *bzw. beinahe überall negativ auf* I*.*

Mit "*beinahe überall positiv*" ist gemeint, dass f'' an allen Stellen positiv ist abgesehen von möglichen Nullstellen, die aber kein Teilintervall (positiver Länge) ganz ausfüllen. Isolierte Nullstellen von f'' sind dabei also erlaubt. Entsprechend ist "*beinahe überall negativ*" zu verstehen. Konvexität tritt in der Ökonomie besonders im Zusammenhang mit progressivem bzw. degressivem Wachsen bzw. Fallen auf. Aus 4.2 wissen wir, dass für wachsende Funktionen strenge Konvexität äquivalent mit progressivem Wachstum ist und strenge Konkavität äquivalent mit degressiver Zunahme. Bei fallenden Funktionen ist dagegen strenge Konvexität gleichbedeutend mit degressivem Abnehmen und strenge Konkavität mit progressivem Fallen. Der Konvexitätssatz liefert nun folgendes Kriterium:

KOROLLAR: *Für zweimal differenzierbare Funktionen* $f : I \to \mathbb{R}$ *gilt:*

f *progressiv wachsend* $\iff f' > 0$ *überall und* $f'' > 0$ *beinahe überall im Inneren von* I*;*

f *degressiv wachsend* $\iff f' > 0$ *überall und* $f'' < 0$ *beinahe überall im Inneren von* I*;*

f *progressiv fallend* $\iff f' < 0$ *überall und* $f'' < 0$ *beinahe überall im Inneren von* I*;*

f *degressiv fallend* $\iff f' < 0$ *überall und* $f'' > 0$ *beinahe überall im Inneren von* I*.*

DISKUSSION: **1)** Wir erinnern an die Definition der Konvexität in 4.2: Eine reelle Funktion f auf einem Intervall I heißt **[streng] konvexe Funktion**, wenn für alle $a < b$ in I die **Konvexitätsungleichung** gilt:

$$f((1-s)a + sb) \underset{[<]}{\leq} (1-s)f(a) + sf(b) \qquad \text{für} \quad 0 < s < 1\,.$$

Mit anderen Worten: Die lineare Interpolationsfunktion mit denselben Werten wie f an den Stellen a und b überschätzt (echt) die Funktionswerte von f im Intervall $]a, b[$. Geometrisch bedeutet strenge Konvexität, dass die Sehnen zum Graphen von f zwischen ihren Endpunkten oberhalb des Graphen verlaufen. Bei einer konvexen, aber nicht streng konvexen Funktion liegt kein Punkt einer Sehne unter dem Graphen, aber es gibt Sehnen, die ganz auf dem Graphen liegen, d.h. es gibt Teilintervalle $[a, b] \subset I$ mit $a < b$, auf denen die Funktion affin linear ist. Bei Konkavität gehen die Ungleichungen in umgekehrter Richtung, die Funktionsgraphen verlaufen dann also oberhalb ihrer Sehnen. Die Konkavität einer Funktion f ist äquivalent mit der (strengen) Konvexität der Gegenfunktion $-f$, daher kann man sich in der Theorie auf die Befassung mit Konvexität beschränken.

2) Mit dem Konvexitätssatz und seinem Korollar ist die Analyse der Konvexität / Konkavität einer Funktion f auf die einfachere Untersuchung des Monotonieverhaltens der Ableitung f' bzw. auf die noch einfachere Aufgabe der Vorzeichenbestimmung bei der zweiten Ableitung f'' zurückgeführt. Entsprechend reduziert das Korollar die Analyse des progressiven bzw. degressiven Wachstums einer Funktion auf die Vorzeichenbestimmung bei ihrer ersten und zweiten Ableitung, was eine viel einfachere Aufgabe ist (wenn die Ableitungen durch überschaubare Terme gegeben sind). Darin liegt der Nutzen und die Bedeutung des Konvexitätssatzes in der Mathematik und in der Wirtschaftsmathematik.

3) In den Wirtschaftswissenschaften wird Positivität der zweiten Ableitung $f'' > 0$ überall auf dem Definitionsintervall I oft mit strenger Konvexität gleichgesetzt. Das ist nicht ganz korrekt; denn *die zweite Ableitung einer streng konvexen Funktion kann Nullstellen haben.* Einfachstes Beispiel ist $f(x) = x^4$ auf $\mathbb{R}$ mit streng wachsender Ableitung $f'(x) = 4x^3$ und einer Nullstelle $x = 0$ bei der zweiten Ableitung $f''(x) = 12x^2$. Strenge Konvexität ist eben (bei zweimal differenzierbaren Funktionen) gleichbedeutend damit, dass die zweite Ableitung nur *beinahe überall positiv* ist auf dem Definitionsintervall, d.h. f'' ist überall nichtnegativ und kann Nullstellen haben, aber die Nullstellen füllen kein ganzes Teilintervall (positiver Länge) aus. Da man aber ökonomische Funktionen $f(x)$ im Allgemeinen nicht genau kennt und eine nichtnegative zweite Ableitung durch eine kleine Störung positiv machen kann (etwa indem man εx^2 addiert mit beliebig kleinem Vorfaktor $\varepsilon > 0$), ist die Gleichsetzung von strenger Konvexität mit Positivität der zweiten Ableitung in der Praxis gerechtfertigt. In derselben Weise beschreibt man in den Wirtschaftswissenschaften progressives Wachstum durch die Bedingungen $f' > 0, f'' > 0$ auf I, obwohl eigentlich nur $f'' > 0$ beinahe überall auf I gesagt werden kann (und f' möglicherweise im linken Randpunkt von I verschwindet).

4) Wir gehen auf den *Beweis des Konvexitätssatzes* ein, weil sich daraus noch weitere, auch für Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften interessante, Beschreibungen der Konvexität ergeben. Für $a < b$ im Definitionsintervall I betrachten wir dazu die Zwischenstellen $x_t := (1-t)a + tb,\ 0 < t < 1$. Die Konvexitätsungleichung $f(x_t) \leq (1-t)f(a)+tf(b)$ kann man dann äquivalent umschreiben zu $f(x_t)-f(a) \leq t[f(b)-f(a)]$ oder zu $f(b)-f(x_t) \leq (1-t)[f(b)-f(a)]$. Wegen $x_t - a = t(b-a)$ und $b - x_t = (1-t)(b-a)$ ist daher jede der beiden Ungleichungen

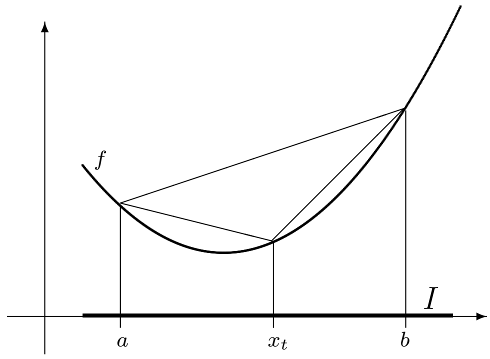
$$\frac{f(x_t) - f(a)}{x_t - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x_t)}{b - x_t}$$

äquivalent mit der Konvexitätsungleichung. Lässt man hierin $t \searrow 0$ bzw. $t \nearrow 1$ gehen, so streben die Punkte x_t gegen a bzw. b, die Differenzenquotienten links daher gegen die Ableitung $f'(a)$ bzw. die rechts gegen $f'(b)$. Es folgt $f'(a) \leq f'(b)$ für alle $a < b$ in I, also ist die Ableitung konvexer Funktionen nichtfallend. Ist umgekehrt f differenzierbar auf I mit nichtfallender Ableitung f' und $a < b$ in I, so berechnen wir für $0 < t < 1$ mit der Quotientenregel $t\frac{d}{dt}\frac{f(x_t)-f(a)}{x_t-a} = f'(x_t) - \frac{f(x_t)-f(a)}{x_t-a} \geq 0$, weil der letzte Quotient gleich $f'(x_\tau)$ ist nach dem Zwischenstellensatz der Differentialrechnung mit einer Zwischenstelle $x_\tau < x_t$. Also ist $\frac{f(x_t)-f(a)}{x_t-a}$ nichtfallend in t und somit $\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, was äquivalent zur Konvexitätsungleichung ist. Weil eine konvexe Funktion f genau dann nicht streng konvex ist, wenn sie auf einem Teilintervall positiver Länge affin linear ist, wenn also ihre Ableitung auf einem solchen Teilintervall konstant ist, sind damit die Aussagen von Teil (i) des Konvexitätssatzes schon bewiesen. Die Aussagen von Teil (ii) erhält man dann durch Anwendungen des Monotoniesatzes auf f'.

Das Korollar folgt, weil z.B. eine Funktion f nach 4.2 genau dann progressiv wächst, wenn sie wachsend und streng konvex ist, und weil die streng wachsende nichtnegative Ableitung f' höchstens im linken Randpunkt des Grundintervalls I verschwinden kann. Der Beweis des Korollars ist aber noch einfacher, wenn wir auf die Definition des progressiven Wachstums zurückgehen, dass nämlich die Zuwächse $f(x+h) - f(x)$ streng wachsend in x sind für $h > 0$ (und x, $x+h \in I$). Mit dem Monotoniesatz ist äquivalent, dass erstens $f'(x+h)-f'(x) \geq 0$ ist für alle $h > 0$, also f' nichtfallend, und dass zweitens f' auf keinem Intervall positiver Länge konstant, also sogar streng monoton ist.

5) Aus den zur Konvexitätsungleichung äquivalenten Ungleichungen in 4) lesen wir die folgende schon in 4.2 angegebene Beschreibung der Konvexität ab:

- *Eine Funktion f ist genau dann [streng] konvex auf I, wenn die Differenzenquotienten $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ zu $a < b$ in I nicht abnehmen [zunehmen] bei Vergrößerung von a oder von b.*
- *Geometrisch bedeutet dies, dass die Steigungen der Sehnen des Graphen nicht abnehmen [bzw. zunehmen], wenn man einen Sehnenendpunkt auf dem Graphen nach rechts verlagert.*

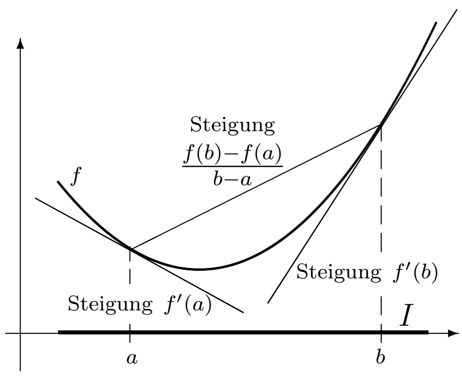


Im konvexen Bereich einer Funktion $f(x)$ nehmen folglich die Änderungen $f(x+1) - f(x)$ bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit mit wachsendem x zu, im konkaven Bereich nehmen sie ab; denn $f(x+1) - f(x)$ ist ja ein Differenzenquotient $\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$. (Wenn eine Einheit klein ist, so dass man $f(x+1) - f(x) \approx f'(x)$ annehmen kann, so ist dies gerade die Monotonieaussage über f', die der Konvexitätssatz macht.) Auch $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ist ein Differenzenquotient, also streng wachsend in $x \in]0, b]$, wenn f auf $]0, b]$ streng konvex ist, bzw. streng fallend auf $]0, b]$, wenn f auf $]0, b]$ streng konkav ist. Im Fall $f(0) = 0$ ist dann insbesondere die Stückfunktion $\overline{f}(x) = \dfrac{1}{x} f(x)$ streng wachsend bzw. streng fallend.

Für eine *Kostenfunktion* $K(x)$ des Produktions–Output x gilt z.B. im progressiven Bereich, dass die Mehrkosten $K(x+1) - K(x)$ für die Produktion einer zusätzlichen Einheit größer sind als die Kosten $K(x) - K(x-1)$ der letzten produzierten Einheit, während es sich im degressiven Bereich der Kostenfunktion umgekehrt verhält. Und wenn $K(x) = K_{\text{var}}(x) + K_{\text{fix}}$ auf $I =]0, x_{\max}]$ oder $I =]0, \infty[$ degressiv wächst, so sind die Stück–variablen Kosten $\dfrac{1}{x} K_{\text{var}}(x)$ streng fallend auf I und größer als die Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ für die Produktion einer weiteren Einheit (solange $x+1 \in I$; beachte, dass $K(x)$ streng konkav ist, genau wenn dies für $K_{\text{var}}(x) = K(x) - K_{\text{fix}}$ gilt, und dass $K_{\text{var}}(0) = 0$ ist).

6) Eine weitere Charakterisierung der Konvexität differenzierbarer Funktionen f, die sich aus dem Beweis des Konvexitätssatzes ergibt, ist folgende (wobei stets $a < b$ sei):

- *Die Funktion f ist genau dann [streng] konvex auf I, wenn die Differenzenquotienten $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ zu jedem Teilintervall $[a, b] \subset I$ nicht kleiner [größer] sind als die Ableitung $f'(a)$ im linken Randpunkt, und auch genau dann, wenn die Quotienten nicht größer [kleiner] sind als die Ableitung $f'(b)$ im rechten Randpunkt.*
- *Geometrisch bedeutet dies, dass die Steigungen der Sehnen des Graphen nicht kleiner [größer] sind als die Tangentensteigung im linken Sehnenendpunkt bzw. nicht größer [kleiner] als die Tangentensteigung im rechten Endpunkt.*

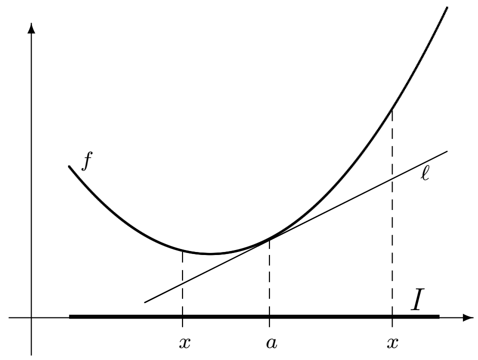


Die Ungleichungen $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$ haben wir in 4) erhalten und dort auch gesehen, dass umgekehrt z.B. aus $\frac{f(x_t)-f(a)}{x_t-a} \leq f'(x_t)$ die Konvexitätsungleichung folgt.

Für konkave Funktionen gelten die Ungleichungen natürlich in umgekehrter Richtung. Bei einer degressiv wachsenden, also konkaven, *Kostenfunktion* $K(x)$ sind z.B. die Mehrkosten $K(x{+}m) - K(x)$ für m zusätzlich produzierte Einheiten kleiner als das m–fache der Grenzkosten $K'(x)$; denn der Differenzenquotient $\frac{K(x+m)-K(x)}{m}$ ist kleiner als die Steigung $K'(x)$ am linken Endpunkt des Intervalls $[x, x{+}m]$. Und die Stück–variablen Kosten $\frac{1}{x}K_{\text{var}}(x)$ sind größer als die Grenzkosten $K'(x)$, weil der Differenzenquotient $\frac{1}{x}K_{\text{var}}(x) = \frac{1}{x-0}(K_{\text{var}}(x) - K_{\text{var}}(0))$ größer ist als die Ableitung $K'_{\text{var}}(x) = K'(x)$ am rechten Endpunkt des Intervalls $[0, x]$.

7) Eine andere wichtige Charakterisierung der Konvexität differenzierbarer Funktionen f ist noch:

- *Eine Funktion f ist genau dann [streng] konvex auf I, wenn die Funktionswerte $f(x)$ nicht kleiner [größer] sind als die Werte der Linearisierung $\ell(x) = f(a){+}f'(a)(x{-}a)$ für alle Stellen $x \neq a$ in I, also $f(x) \geq f(a){+}f'(a)(x{-}a)$.*
- *Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph der Funktion nirgends unterhalb [abgesehen von den Berührpunkten echt oberhalb] seiner Tangenten verläuft.*



Das ist nichts anderes als die Ungleichungen $f'(a) \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ für $a < x \in I$ bzw. $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq f'(a)$ für $I \ni x < a$ aus 6), die wir dort schon als äquivalent mit der Konvexität von f befunden haben. Für konkave Funktionen gilt wiederum alles in umgekehrter Richtung, die Graphen konkaver Funktionen verlaufen also unterhalb ihrer Tangenten.

Dies hat eine *Anwendung auf die Zuwachsformel* $f(a{+}h) \approx f(a) + hf'(a)$, die für kleine Werte von $|h|$ näherungsweise gilt (mit einem Fehler, der wesentlich kleiner ist als $|h|$). Ist f streng konvex, so gilt $f(a{+}h) > f(a) + hf'(a)$ für $h \neq 0$, der Zuwachs wird also unterschätzt, wenn man ihn näherungsweise durch die Linearisierung von f zur Stelle a berechnet. Dies gilt sogar für beliebige Argumentzuwächse $h \neq 0$, nicht nur für solche von kleinem Betrag. Ist $|h|$ nicht klein, so kann der Fehler in der Zuwachsformel groß sein, aber man kennt – bei konvexer Funktion f – immerhin das Vorzeichen des Fehlers. Entsprechend wird der Zuwachs bei einer konkaven Funktion überschätzt, wenn man ihn näherungsweise mit der Zuwachsformel berechnet.

8) Über *Extremstellen konvexer Funktionen* kann man folgendes aussagen:

- *Eine nichtkonstante konvexe Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat lokale Maximumstellen höchstens im Rand von I und alle lokalen Minimumstellen sind absolute Minimumstellen. Ist f streng konvex, so gibt es höchstens eine absolute Minimumstelle.*
- *Jeder kritische Punkt (also jede Nullstelle der Ableitung) einer differenzierbaren konvexen Funktion f in einem Intervall I ist schon absolute Minimumstelle in I.*

Die erste Aussage kann man sich leicht überlegen mit Hilfe der Konvexitätsungleichung und der in 5) festgestellten Monotonie der Differenzenquotienten. Die zweite Aussage folgt aus 7), da $f'(a) = 0$ ist in einem kritischen Punkt a von f. Wenn f nur konvex, aber nicht streng konvex ist, so bilden die Minimumstellen von f in I ein Intervall, das unter Umständen mehr als einen Punkt enthält. Konkave Funktionen haben entsprechend lokale Minimumstellen höchstens im Rand (wenn sie nicht konstant sind) und jeder kritische Punkt ist schon absolute Maximumstelle.

9) Weil oft formuliert wird, konvexe Funktionen seien solche mit "linksgekrümmtem" Graphen, sagen wir abschließend noch etwas über den Zusammenhang von *Konvexität und Graphenkrümmung*: In der Differentialgeometrie wird bewiesen, dass es zu jedem Punkt $(x, f(x))$ im Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f eine eindeutige Kreislinie gibt (mit evtl. unendlichem Radius, was als Gerade aufzufassen ist), die den Funktionsgraphen nahe diesem Punkt am besten approximiert. Diese Kreislinie heißt der *Krümmungskreis*, sein Radius $\rho(x)$ der *Krümmungsradius* und das Reziproke $\kappa(x) = 1/\rho(x)$ die *Krümmung* des Funktionsgraphen an der Stelle $(x, f(x))$. Eine explizite Formel hierfür ist $\kappa(x) = |f''(x)|/(\sqrt{1+f'(x)^2})^3$. Im Fall $f''(x) = 0$ verschwindet also die Graphenrümmung im Punkt $(x, f(x))$, und in einem kritischen Punkt $f'(x) = 0$ ist der Betrag der zweiten Ableitung $|f''(x)|$ die Krümmung. Das Vorzeichen von $f''(x)$ ist positiv, wenn der Krümmungskreis oberhalb der Tangente an den Graphen im Punkt $(x, f(x))$ liegt und negativ, wenn er unterhalb liegt. Im ersten Fall sagt man, dass der Funktionsgraph in $(x, f(x))$ *nach links gekrümmt* ist, im zweiten Fall *nach rechts gekrümmt.* (Diese Terminologie beruht auf der Vorstellung, dass man die Graphenkurve in Aufsicht von links nach rechts durchläuft.) Daher kann man sagen:

- *Streng konvexe Funktionen (bzw. genauer: solche mit überall positiver zweiter Ableitung) sind solche, deren Graph nach links gekrümmt ist; streng konkave Funktionen sind solche, deren Graph nach rechts gekrümmt ist.* ■

Aufgrund der ökonomischen Bedeutung von Konvexität und Konkavität ist man an den Stellen im Definitionsbereich einer Funktion interessiert, bei denen sich konvexes Verhalten in konkaves "wendet" oder umgekehrt, also z.B. progressives Wachstum in degressives Wachstum umschlägt oder degressives Abfallen in progressives. Diese Punkte haben einen entsprechenden Namen:

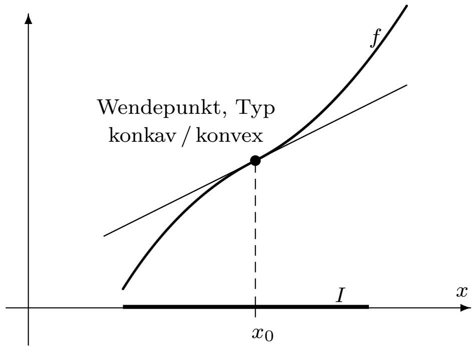
DEFINITION: Ein innerer Punkt x_0 des Definitionsbereichs einer differenzierbaren reellen Funktion f heißt **Wendepunkt** von f, wenn für kleine $\delta > 0$ strenge Konvexität auf $]x_0-\delta, x_0[$ vorliegt und strenge Konkavität auf $]x_0, x_0+\delta[$ (**konvex / konkaver Typ**) oder umgekehrt (**konkav / konvexer Typ**). ■

SATZ (**Ableitungskriterien für Wendepunkte**): *Sei $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und x_0 innerer Punkt von I. Dann gilt:*

(i) (**notwendiges Kriterium**) Ist x_0 Wendepunkt, so gilt $f''(x_0) = 0$.

(ii) (**hinreichendes Kriterium**) Ist $f''(x_0) = 0$ und hat f'' in x_0 einen Vorzeichenwechsel vom Typ $-/+$, so liegt dort ein Wendepunkt vom konkav / konvexen Typ vor, bzw. bei einem Vorzeichenwechsel bei f'' vom Typ $+/-$ ein Wendepunkt vom konvex / konkaven Typ. Insbesondere gilt das, wenn $f''(x_0) = 0$ ist und $f'''(x_0) > 0$ bzw. $f'''(x_0) < 0$.

Der *Beweis* ergibt sich unmittelbar aus dem Konvexitätssatz. Dass x_0 Wendepunkt ist, bedeutet strenges Wachstum der Ableitung f' auf einer Seite von x_0 und strenges Fallen auf der anderen Seite (nahe bei x_0). Dann hat f' also eine strikte lokale Extremstelle in x_0 und es gilt $f''(x_0) = 0$. Bei einem Vorzeichenwechsel $-/+$ von f'' an der Stelle x_0, erst recht also bei $f''(x_0) = 0 < f'''(x_0)$, ist umgekehrt f streng konkav links und streng konvex rechts von x_0.



DISKUSSION: **1)** *Geometrische Interpretation*: In Wendepunkten ändert sich ein rechtsgekrümmter Verlauf des Funktionsgraphen in einen linksgekrümmten Verlauf oder umgekehrt. Da die Graphen konvexer Funktionen über und die konkaver Funktionen unter ihren Tangenten verlaufen, *liegt der Graph nahe einem Wendepunkt auf einer Seite über und auf der anderen Seite unter seiner Tangente im Wendepunkt.* (Diese Eigenschaft ist allerdings ein wenig schwächer als die Wendepunkteigenschaft im Sinne der obigen Definition; denn sie kann auch gegeben sein, ohne dass f auf jeder Seite nahe x_0 konvex oder konkav ist.) Insbesondere *ist ein kritischer Wendepunkt stets ein Sattelpunkt*; denn wenn $f'(x_0) = 0$ ist im Wendepunkt x_0, so ist die horizontale Gerade $y = f(x_0)$ die Graphentangente, also hat f auf einer Seite von x_0 Werte $< f(x_0)$ und auf der anderen Seite Werte $> f(x_0)$ (nahe x_0).

2) *Ökonomische Interpretation*: In Wendepunkten ändert sich der "Trend" einer ökonomischen Funktion. Ein progressiver Anstieg beginnt sich dort abzuschwächen, ein degressiver Anstieg beginnt sich zu verstärken. Oder ein progressiver Abfall beginnt sich zu verlangsamen bzw. eine degressive Abnahme sich zu beschleunigen. (Das darf nicht verwechselt werden mit dem Umschlagen von Ansteigen der Funktion in Abfallen oder umgekehrt — dies erfolgt in den strikten lokalen Extremstellen der Funktion, nicht in den Wendepunkten!)

3) *Nicht jede Nullstelle der zweiten Ableitung muss ein Wendepunkt sein*; zum Beispiel ist $f(x) = x^4$ streng konvex auf $\mathbb{R}$, also ohne Wendepunkte, aber $f''(x) = 12x^2$ verschwindet in $x = 0$. Es muss zusätzlich ein Vorzeichenwechsel von f'' bei x_0 hinzukommen (der ist garantiert, wenn $f'''(x_0) \neq 0$), damit man mit Sicherheit einen Wendepunkt hat. Genauer ist x_0 dann und nur dann Wendepunkt der zweimal differenzierbaren Funktion f, wenn f'' auf einer Seite $]x_0{-}\delta, x_0[$ beinahe überall positiv ist und auf der anderen Seite $]x_0, x_0{+}\delta[$ beinahe überall negativ oder umgekehrt. (Zur Erinnerung: "Beinahe überall positiv" bedeutet Positivität abgesehen von möglichen Nullstellen, die aber kein Teilintervall positiver Länge ausfüllen.) ■

BEISPIELE (***zur Konvexitätsanalyse und zu Wendepunkten***): Das Konvexitätsverhalten der elementaren Grundfunktionen und vieler weiteren elementaren Funktionen, für die man das Monotonieverhalten der ersten oder das Vorzeichen der zweiten Ableitung bestimmen kann, lässt sich mit dem Konvexitätssatz mühelos diskutieren. Dabei ergeben sich auch gleich die Wendepunkte.

(1) Für *Potenzfunktionen* x^s sehen wir aus

$$\frac{d^2}{dx^2}x^s = s(s{-}1)x^{s-2}\begin{cases} > 0 & \text{für } x > 0 \text{ und } s \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \\ < 0 & \text{für } x > 0 \text{ und } 0 < s < 1\,, \end{cases}$$

dass sie streng konvex sind auf $\mathbb{R}_{>0}$ für Exponenten $s > 1$ oder $s < 0$ (für $s > 1$ sogar auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$), während die Wurzelfunktionen x^s mit $0 < s < 1$ streng konkav sind auf $\mathbb{R}_{>0}$ (und sogar auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$). Für $s = 0$ ist $x^s \equiv 1$ konstant, für $s = 1$ ist $x^s = x$ homogen linear, also liegt in diesen Fällen Konvexität und gleichzeitig auch Konkavität vor, allerdings natürlich nur schwache. Wendepunkte gibt es bei Potenzfunktionen in $\mathbb{R}_{>0}$ nicht. Für natürliche Exponenten $n \geq 2$ zeigt die auf ganz $\mathbb{R}$ gültige Ableitungsformel $\frac{d^2}{dx^2}x^n = n(n{-}1)x^{n-2}$, dass strenge Konvexität auf $\mathbb{R}$ vorliegt, wenn n gerade ist, dagegen strenge Konvexität auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und strenge Konkavität auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$, wenn n ungerade ist. Für ungerade Exponenten $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ hat x^n also genau den einen Wendepunkt $x = 0$ in $\mathbb{R}$.

(2) Für *Exponentialfunktionen* a^x mit Basis $0 < a \neq 1$ ist

$$\frac{d^2}{dx^2} a^x = (\ln a)^2 a^x > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R},$$

also sind diese Funktionen streng konvex auf ganz $\mathbb{R}$ (und damit insbesondere ohne Wendepunkte). Das wissen wir natürlich schon längst aus 4.2; schließlich ist die Ungleichung zwischen dem gewichteten geometrischen und arithmetischen Mittel nichts anderes als die Konvexitätsungleichung für Exponentialfunktionen.

(3) Für die natürliche *Logarithmusfunktion* gilt

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln x = \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{für alle} \quad x > 0,$$

also ist diese Funktion streng konkav auf $\mathbb{R}_{>0}$. Auch das haben wir in 4.2 schon gesehen: Als Umkehrfunktion der streng konvexen und streng wachsenden Exponentialfunktion e^x ist die natürliche Logarithmusfunktion streng wachsend und streng konkav.

(4) Die Hyperbelfunktionen $\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ und $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ haben Ableitungen $\cosh' = \sinh$ und $\sinh' = \cosh$, also $\cosh'' = \cosh > 0$ auf $\mathbb{R}$, während $\sinh'' = \sinh$ positiv ist auf $\mathbb{R}_{>0}$ und negativ auf $\mathbb{R}_{<0}$. Folglich ist der hyperbolische Kosinus $\cosh$ streng konvex auf $\mathbb{R}$ und der hyperbolische Sinus $\sinh$ ist streng konvex auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, aber streng konkav auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$, so dass $x = 0$ eindeutiger Wendepunkt von $\sinh$ ist.

Für die hyperbolische Tangensfunktion $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ berechnen wir mit der Quotientenregel und $\cosh^2 - \sinh^2 \equiv 1$:

$$\frac{d^2}{dx^2} \tanh x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{-2\sinh x}{\cosh^3 x} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Diese zweite Ableitung hat also dasselbe Vorzeichen wie $\sinh'' x$, und folglich hat die hyperbolische Tangensfunktion auch dasselbe Konvexitätsverhalten wie $\sinh$ und insbesondere einen eindeutigen Wendepunkt in $x = 0$. Es ist intuitiv klar, dass jede elementare Funktion $f(x)$, die wie diese Tangensfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton ist und dabei Werte zwischen zwei endlichen "Sättigungsgrenzen" hat (hier $-1 \leq \tanh x \leq 1$ für alle x), mindestens einen Wendepunkt haben muss; denn hätte f'' keinen Vorzeichenwechsel, so wäre $f' > 0$ streng wachsend und damit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ oder $f' > 0$ wäre streng fallend und dann $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Daher haben *logistische Funktionen* wie $\tanh$ auf $\mathbb{R}$ stets einen Wendepunkt.

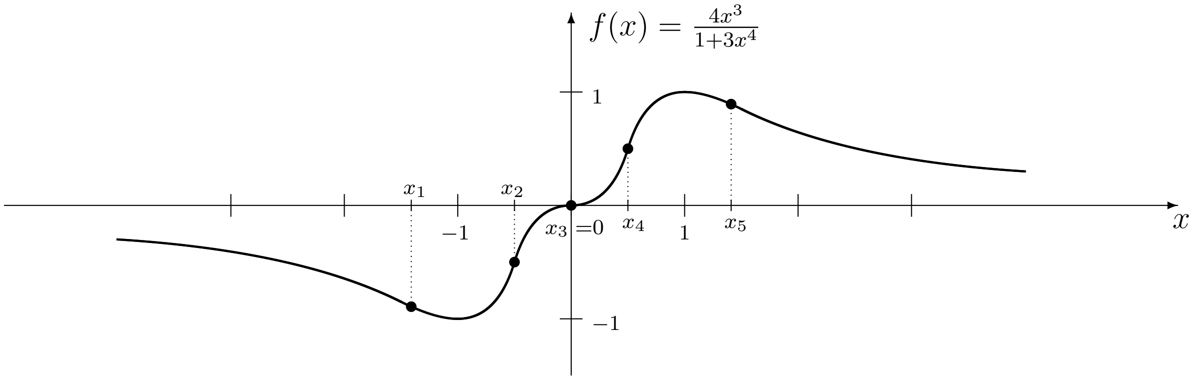
(5) Die am Ende von 4.5 schon im Hinblick auf Extremstellen untersuchte Funktion $f(x) = \dfrac{4x^3}{1+3x^4}$ soll auf ihr Konvexitätsverhalten untersucht werden. Es ist

$$f'(x) = 12\,\frac{x^2 - x^6}{(1+3x^4)^2} \quad \text{und} \quad f''(x) = 24x\,\frac{3x^8 - 12x^4 + 1}{(1+3x^4)^3}\,.$$

Die Nullstellen von f'' sind $x = 0$ und die Lösungen von $3x^8 - 12x^4 + 1 = 0$. Das ist eine quadratische Gleichung für x^4 mit den Lösungen $x^4 = 2 \pm \frac{1}{6}\sqrt{132} = 2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{33}$ (beide Vorzeichen sind möglich, da beide Wahlen nichtnegative Werte für x^4 ergeben). Damit bekommen wir insgesamt vier weitere Nullstellen $\pm\sqrt[4]{2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{33}}$ von f''. Wir nummerieren sie der Größe nach:

$$x_1 = -\sqrt[4]{2+\tfrac{1}{3}\sqrt{33}} \approx -1.41,\ x_2 = \sqrt[4]{2-\tfrac{1}{3}\sqrt{33}} \approx -0.54,\ x_3 = 0,\ x_4 = -x_2,\ x_5 = -x_1.$$

Schreibt man den Zähler der Darstellung von f'' in der Form $24x \cdot (x^4 - x_1^4) \cdot (x^4 - x_2^4)$, so erkennt man auch unmittelbar, dass f'' bei x_1 einen Vorzeichenwechsel vom Typ $-/+$ hat, bei x_2 einen vom Typ $+/-$, bei $x_3 = 0$ wieder vom Typ $-/+$, bei x_4 vom Typ $+/-$ und zuletzt bei x_5 wieder einen vom Typ $-/+$. Somit sind die fünf Nullstellen von f'' allesamt Wendepunkte, und f ist streng konkav auf den Intervallen $]-\infty, x_1],\ [x_2, 0],\ [x_4, x_5]$ und streng konvex auf den Intervallen $[x_1, x_2],\ [0, x_4],;[x_5, \infty[$. Der Wendepunkt $x_3 = 0$ ist wegen $f'(0) = 0$ zugleich ein Sattelpunkt.



Die Berechnung der dritten Ableitung f''' wäre in diesem Beispiel ziemlich kompliziert geworden. Es ist meistens einfacher, wie hier die Wendepunkte direkt anhand der Vorzeichenwechsel von f'' zu bestimmen. ■

BEMERKUNG (**zur Kurvendiskussion / Marginalanalyse**): Unter **Kurvendiskussion** versteht man alle auf Differentialrechnung, Grenzwertrechnung und elementares Rechnen gegründeten Methoden, mit denen man sich einen Überblick über den Verlauf einer gegebenen elementaren Funktion einer reellen Variablen verschaffen kann. Die “Kurve” ist dabei der Graph der Funktion, den man nach erfolgter Analyse mehr oder weniger genau zeichnen kann. Das Wort **Funktionsanalyse** beschreibt treffender, worum es eigentlich geht. In ökonomischer Terminologie wird auch von der **Marginalanalyse** einer Funktion gesprochen, wobei auf Methoden abgestellt ist, welche auf Betrachtung der Ableitung (*Marginalfunktion*) der gegebenen Funktion gegründet sind. Die folgenden Punkte gehören zur Funktionsanalyse, wobei die Reihenfolge nach Belieben und Zweckmäßigkeit gewählt werden kann:

- **Definitionsbereich**: Dieser ist vorgegeben oder, wenn nur ein Funktionsterm (Formel) angegeben wurde, der maximale sinnvolle Definitionsbereich des Terms (Nullstellen von Nennern gehören z.B. nicht dazu).

- **Parität**: Ist die Funktion gerade oder ungerade? Eine positive Antwort liefert entsprechende Symmetrien des Graphen bzgl. der Spiegelung an der vertikalen Achse oder am Ursprung (für ökonomische Anwendungen meist weniger von Interesse).

- **Verhalten am Rand bzw. im Unendlichen**: Hat die Funktion Grenzwerte (endliche oder unendliche), wenn sich das Argument aus dem Definitionsbereich einem Randpunkt nähert oder, falls der Definitionsbereich von rechts bzw. links unbeschränkt ist, wenn das Argument gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ strebt? Kann man evtl. einfache Asymptotenfunktionen finden? Nähert sich die Funktion ihren Grenzwerten bzw. Asymptotenfunktionen von oben oder von unten?

• **Polstellen Unendlichkeitsstellen**: Gibt es Unendlichkeitsstellen, wo z.B. der Nenner verschwindet, der Zähler aber nicht (oder nur von kleinerer Ordnung als der Zähler)? Welches Vorzeichen haben die Funktionswerte beiderseits einer solchen Stelle?

• **andere Unstetigkeitsstellen, Knickstellen**: Sprungstellen oder Knickstellen (an denen die Funktion zwar stetig ist, aber ihre Ableitung eine Sprungstelle hat) können auftreten, wenn die Funktion abschnittsweise aus verschiedenen elementaren Funktionen zusammengesetzt ist. Mit Knickstellen muss man insbesondere immer rechnen, wenn die Funktion durch einen Term gegeben ist, in dem die Betragsfunktion vorkommt.

• **Nullstellen**: Die geben über den Funktionsverlauf insgesamt zwar wenig Information, werden aber gebraucht für den nächsten Punkt.

• **Vorzeichenbestimmung für die Funktionswerte**: Das geht z.B. durch die Feststellung der Vorzeichen im Unendlichen (d.h. für großen Betrag des Arguments) und der Vorzeichenwechsel in den Null– und Unendlichkeitsstellen. Dieser Punkt ist auch für ökonomische Anwendungen wichtig, z.B. für die Bestimmung der Gewinnzone (Positivitätsintervall) einer vorgelegten Gewinnfunktion.

• **kritische Stellen**: Das sind die Nullstellen der Ableitung. Die Graphentangente ist dort horizontal.

• **absolute und lokale Extremstellen**: Die werden bestimmt mit den in 4.5 beschriebenen Methoden. Sie ergeben sich auch automatisch, wenn man den nächsten Punkt erledigen kann.

• **Monotonieverhalten**: Die Bestimmung der maximalen Intervall monotonen Wachsens bzw. monotonen Fallens geht mit dem Monotoniesatz durch Vorzeichenbetrachtung bei der Ableitung.

• **Konvexitätsverhalten, Wendepunkte**: Das erledigt man mit dem Konvexitätssatz bzw. den Ableitungskriterien für Wendepunkte durch Vorzeichenbestimmung bei der zweiten Ableitung.

• Eine kleine **Wertetabelle** für die Funktion und ihre Ableitung an ausgesuchten Stellen hilft auch oft, einen Überblick über den Funktionsverlauf zu bekommen. Man berechnet und zeichnet einige Punkte des Graphen und (mit Hilfe der Ableitungswerte, also der Tangentensteigungen) die Graphentangenten dort. Gerade die Tangenten sind oft sehr informativ. ■

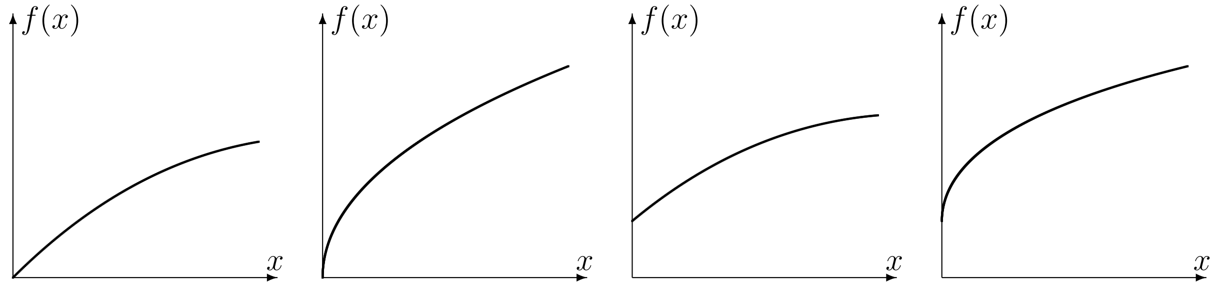
Die Hauptsätze der Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen sind damit, soweit sie für eine Einführung in die Wirtschaftsmathematik relevant sind, vollständig abgehandelt. (Einige weiterführende Sätze aus der Mathematik stellen wir ohne ausführliche Diskussion am Ende dieses Abschnitts noch vor.) In der Wirtschaftsmathematik spielen Funktionen mit speziellem Monotonie– und Konvexitätsverhalten eine wichtige Rolle, die zur Modellierung bestimmter ökonomischer Vorgänge verwendet werden, welche dieses Verhalten aufgrund ökonomischer Überlegungen oder empirischer Gesetzmäßigkeiten zeigen. Dafür hat sich auch eine spezielle ökonomische Terminologie entwickelt. Diese führen wir in den folgenden Bemerkungen noch ein, in der es um die mathematische Modellierung ökonomischer Sachverhalte geht. Weitere mathematische Theorie wird dabei nicht entwickelt und auch nicht gebraucht.

DISKUSSION (**Konvexität und Konkavität bei ökonomischen Funktionen**):

1) Eine nichtnegative, streng wachsende und streng konkave Funktion auf einem Intervall $I = [0, \infty[$ oder $I = [0, x_{\max}]$ (mit einer endlichen Kapazitätsgrenze $x_{\max} > 0$) heißt in der Wirtschaftswissenschaft **neoklassische Funktion**. (Warum, und was eine "klassische" Funktion ohne die Vorsilbe "neo" sein soll, war nicht herauszufinden.) Die charakteristischen Eigenschaften einer solchen Funktion kann man, zweimalige Differenzierbarkeit unterstellt, folgendermaßen angeben:

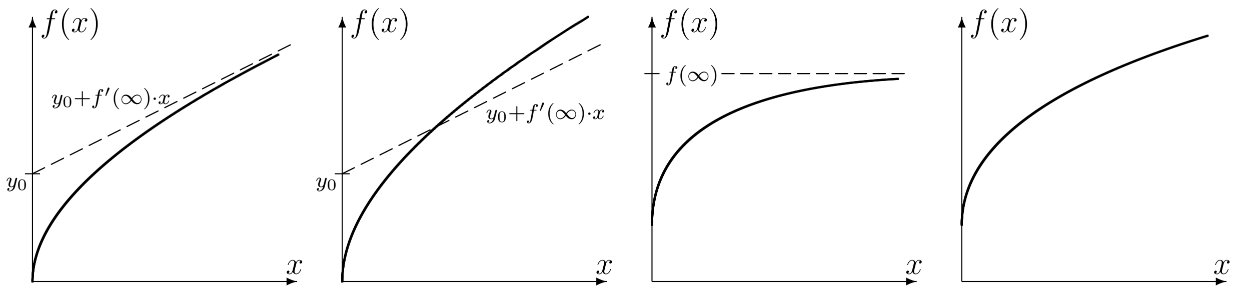
$$f \ \geq \ 0\,, \qquad f' \ > \ 0\,, \qquad f'' \ < \ 0\,.$$

Die letzte Bedingung $f'' > 0$ auf I ist dabei eine leichte Verschärfung der strengen Konkavität, die ja nur bedeutet, dass $f'' < 0$ *beinahe* überall auf dem Definitionsintervall ist, also Nullstellen von f'' erlaubt (die allerdings kein Teilintervall positiver Länge ausfüllen dürfen). Bei $x = 0$ wird Stetigkeit von rechts angenommen, d.h. $f(x)$ hat bei $x \searrow 0$ einen endlichen Grenzwert $f(0) \geq 0$. Die Ableitung $f'(x)$ hat, da sie streng fällt und positiv ist, bei $x \searrow 0$ entweder einen endlichen positiven Limes $f'(0)$ oder den Limes $+\infty$; unendliche Graphensteigung bei $x = 0$ ist hier also zugelassen.



neoklassische Funktionen für x nahe 0

Bei $x \to \infty$ können neoklassische Funktionen unterschiedliches Verhalten zeigen. Da $f'(x)$ streng fällt und positiv ist, existiert ein endlicher nichtnegativer Grenzwert $f'(\infty) := \lim_{x\to\infty} f'(x) \geq 0$. Wegen der Konkavität von f gilt gilt $\frac{1}{x}[f(x) - f(0)] \geq f'(x) \geq f'(\infty)$ für alle $x > 0$, also $f(x) \geq f(0) + f'(\infty) \cdot x$. Ist $f'(\infty) > 0$, so wächst folglich $f(x)$ linear an bei $x \to \infty$ und strebt so schnell gegen $+\infty$ wie die lineare Funktion $f'(\infty) \cdot x$ (wegen $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a)$ und $f'(a) \approx f'(\infty)$ für $0 \ll a < x$ auch nicht schneller); genauer sind beide Funktionen asymptotisch gleich, d.h. $\frac{f(x)}{xf'(\infty)} \to 1$ bei $x \to \infty$. Es kann dann sein, dass sich $f(x)$ bei $x \to \infty$ einer linearen Asymptotenfunktion $y_0 + f'(\infty) \cdot x$ von unten nähert; möglich ist aber auch $f(x) - f'(\infty) \cdot x \to \infty$, so dass $f(x)$ jede solche lineare Funktion für große x beliebig weit übertrifft. Ebenso haben wir im Fall $f'(\infty) = 0$ zwei Möglichkeiten: $f(x)$ kann sich bei $x \to \infty$ einem endlichen Grenzwert $f(\infty) > f(0)$ von unten nähern oder gegen $+\infty$ gehen (das aber dann langsamer als jede lineare Funktion).



$f(x) - f'(\infty) \cdot x \to y_0$ $\quad$ $f(x) - f'(\infty) \cdot x \to \infty$ $\quad$ $f'(\infty) = 0,\ f(\infty) < \infty$ $\quad$ $f'(\infty) = 0,\ f(\infty) = \infty$

neoklassische Funktionen bei $x \to \infty$

Elementare neoklassische Funktionen sind zum Beispiel folgende (die Bedingungen an die Parameter garantieren jeweils $f > 0$, $f' > 0$ und $f'' < 0$ auf $\mathbb{R}_{>0}$; "CES" ist eine Abkürzung für "**C**onstant **E**lasticity of **S**ubstitution", was in Kapitel 5 erklärt wird):

$$a \cdot x^s \quad \text{mit} \quad a > 0,\ 0 < s < 1 \qquad (\textit{Cobb–Douglas–Typ}),$$

$$a(x+b)^s + c \quad \text{mit} \quad a > 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0,\ 0 < s < 1 \qquad \text{etwas verallgemeinert},$$

$$a(x^s+b)^{1/s} + c \quad \text{mit} \quad a > 0,\ b > 0,\ c \geq 0,\ 0 < s < 1 \qquad (\textit{CES–Typ}),$$

$$\frac{a}{1+b\mathrm{e}^{-cx}} \quad \text{oder} \quad \frac{a(1-\mathrm{e}^{-cx})}{1+b\mathrm{e}^{-cx}} \quad \text{mit} \quad a > 0,\ 0 < b \leq 1,\ c > 0 \quad (\textit{logistische Typen}),$$

$$\frac{ax}{x+b} + c \quad \text{oder} \quad \frac{ax}{x+b} + c + dx \quad \text{mit} \quad a > 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0,\ d > 0 \quad (\textit{rationale Typen}).$$

Damit ist die Liste der Möglichkeiten für neoklassische Funktionen keineswegs erschöpft; neoklassisch sind z.B. auch die Funktionen $\log(1+x)$ und $\arctan x$ und noch viele weitere. Die logistischen Typen und der erste angegebene rationale Typ haben Grenzwert $f(\infty) < \infty$, die anderen angegebenen Funktionen haben alle unendlichen Grenzwert $f(\infty) = \infty$ bei $x \to \infty$, wobei nur im Cobb–Douglas Fall der Ableitungslimes $f'(\infty) = 0$ ist und ansonsten $f'(\infty) > 0$. Der zweite rationale Typ hat die lineare Asymptotenfunktion $a + c + dx$, der CES–Typ ist mit ax asymptotisch gleich bei $x \to \infty$, hat aber keine lineare Asymptotenfunktion (für $s = \frac{1}{2}$ z.B. ist $a(x^s + b)^{1/s} = ax + 2ab\sqrt{x} + ab^2 + c$). Es gibt übrigens *keine polynomialen neoklassischen Funktionen* $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ auf ganz $\mathbb{R}_{\geq 0}$; denn aus $p' > 0$ folgte mit $x \to \infty$, dass $a_n > 0$ sein muss, aus $p'' < 0$ aber, dass $a_n < 0$ ist.

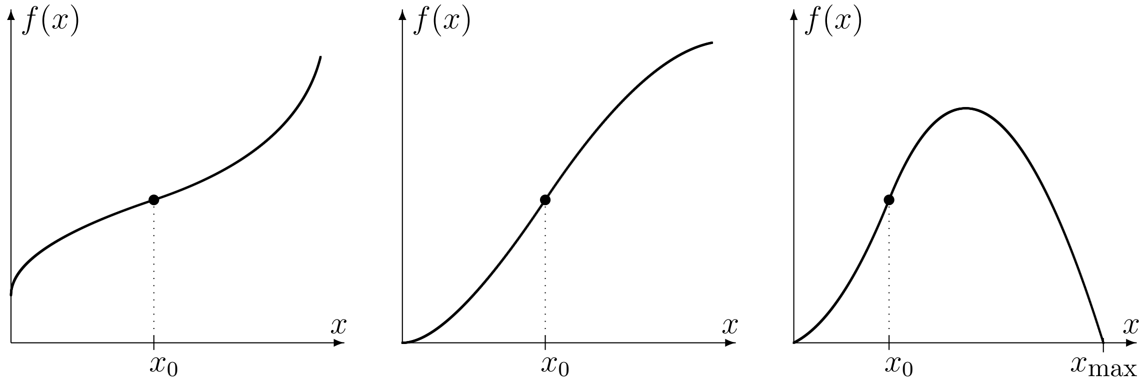
Zahlreiche ökonomische Abhängigkeiten werden sinnvollerweise durch neoklassische Funktionen modelliert, zum Beispiel folgende:

- *Kostenfunktionen* $K(x)$, wenn die Kosten bei Vergrößerung des Produktions–Output x degressiv wachsen, weil die Produktion bei größeren Stückzahlen günstiger ist; eine Erhöhung des Output erhöht dann zwar die Kosten $K(x)$, verringert aber die Grenzkosten $K'(x)$;
- *Nutzenfunktionen* $U(x)$ geben den (irgendwie) durch eine positive Zahl bewerteten Nutzen in Abhängigkeit von der dafür verbrauchten Menge x eines Gutes an; bei höherem Verbrauch ist typischerweise der Nutzen größer, also also der Grenznutzen $U'(x)$ positiv, aber die Nutzenzuwächse bzw. der Grenznutzen nehmen normalerweise mit höherem Verbrauch ab, also $U''(x) < 0$ (sog. *erstes Gossensches Gesetz*, der Verbrauch einer zusätzlichen Einheit stiftet weniger Nutzen als die zuletzt verbrauchte Einheit);
- *Produktionsfunktionen* $x(r)$ geben den erzielten Produktions–Output in Abhängigkeit von der eingesetzten Menge r eines Produktionsfaktors an; sie sind immer positiv, wachsend und häufig auch degressiv wachsend und damit neoklassisch, weil der Einsatz einer zusätzlichen Faktoreinheit bei schon gegebenem hohen Faktoreinsatz weniger bewirkt als bei noch geringem Faktoreinsatz;
- *Konsumfunktionen* $C(Y)$ sind neoklassisch, weil mit wachsendem Einkommen Y der davon konsumierte Teil $C(Y)$ zwar wächst, aber (nach einem schon genannten empirischen Gesetz von *Keynes*) degressiv, d.h. von einer zusätzlichen Einkommenseinheit wird weniger (oder jedenfalls nicht mehr) konsumiert als von der vorangegangenen Einkommenseinheit.

2) Unter einer **ertragsgesetzlichen Funktion** $f(x)$ versteht man in der Wirtschaftswissenschaft eine nichtnegative Funktion auf einem Intervall $[0,\infty[$ oder $[0,x_{\max}]$, die im Inneren genau einen Wendepunkt x_0 hat, auf $[0,x_0]$ streng wächst und entweder auf $[0,x_0]$ streng konkav und rechts von x_0 streng konvex ist (**konkav / konvexer Typ**) oder auf $[0,x_0]$ streng konvex und rechts von x_0 streng konkav (**konvex / konkaver Typ**). Der Wendepunkt x_0 heißt die **Schwelle des Ertragsgesetzes** und ist die eindeutige Minimumstelle der Ableitung f' im Definitionsintervall beim konkav / konvexen Typ (weil dann f' streng fällt links von x_0 und streng wächst rechts davon) bzw. eindeutige Maximumstelle von f' beim konvex / konkaven Typ (weil dann f' streng wächst links von x_0 und streng fällt rechts davon). Im Fall des konkav / konvexen Typs ist die Funktion streng wachsend auf ihrem gesamten Definitionsintervall mit Limes $+\infty$ bei $x\to\infty$ (weil die Ableitung in x_0 nicht negativ ist und rechts von x_0 streng wächst). Im konvex / konkaven Fall kann die Funktion durchweg wachsend sein mit einem unendlichen oder endlichen Limes bei $x\to\infty$ ("Typ I"), es ist aber auch möglich, dass sie rechts von x_0 nach Erreichen eines Maximums zu fallen beginnt ("Typ II"), und in diesem Fall kann die Funktion nur auf einem beschränkten Intervall $[0,x_{\max}]$ nichtnegativ bleiben. In etwas verschärfter Form kann man die charakteristischen Eigenschaften einer ertragsgesetzlichen Funktion folgendermaßen angeben:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x\,, \qquad f'(x) > 0 \quad \text{für } 0 < x \leq x_0 \qquad \text{und}$$

$$\text{entweder} \quad f''(x)\begin{cases} < 0 & \text{für } 0 < x < x_0 \\ > 0 & \text{für } x > x_0 \end{cases} \qquad \text{oder} \quad f''(x)\begin{cases} > 0 & \text{für } 0 < x < x_0 \\ < 0 & \text{für } x > x_0\,. \end{cases}$$



konkav / konvexer Typ *konvex / konkaver Typ I* *konvex / konkaver Typ II*

ertragsgesetzliche Funktionen

Der konkav / konvexe Typ einer ertragsgesetzlichen Funktion liegt z.B. vor bei einer *Kostenfunktion* $K(x)$, wenn die Kosten zunächst mit zunehmendem Output x degressiv wachsen, bei Überschreiten einer gewissen Output–Schwelle x_0 aber progressiv steigen, weil die Kostenstruktur dann ungünstiger wird (überlastete Produktionsanlagen, Zuschaltung weniger kostengünstiger Aggregate, Hereinnahme von Fremdfirmen, . . .). Die Schwelle x_0 des Ertragsgesetzes ist hier die Stelle minimaler Grenzkosten. So lange diese Schwelle nicht überschritten ist, sind die Kosten für jede zusätzlich produzierte Einheit geringer als die für die zuletzt produzierte, und ein Unternehmer wird die Produktion in jedem Fall bis zu dieser Schwelle (und noch etwas weiter, s.u.) ausweiten, wenn der Marktpreis konstant ist und Gewinn ermöglicht und wenn der Output x_0 am Markt abgesetzt werden kann.

Ertragsgesetzlichen Funktionen vom konvex / konkaven Typ kann man als Produktionsfunktionen $x(r)$ verwenden in Situationen, bei denen der Output $x(r)$ bei kleinem Faktoreinsatz beginnend mit $x(0) = 0$ zunächst progressiv wächst, nach Überschreiten eines Schwellenwertes aber degressiv wachsend wird und schließlich vielleicht sogar fällt. (Man denke z.B. an eine chemische, biologische oder landwirtschaftliche Produktion; es ist dann klar, dass ein Überangebot von gewissen zur Produktionssteigerung bestimmten Stoffen uneffektiv ist und vielleicht sogar einen Rückgang der Produktion bewirkt.) Die Schwelle des Ertragsgesetzes r_0 ist hier die Maximumstelle der Grenzproduktivität. Solange die Faktormenge unter dieser Schwelle bleibt, bewirkt jede zusätzlich eingebrachte Faktoreinheit eine größere Produktionssteigerung als die letzte Faktoreinheit davor. Eine ertragsgesetzliche konkav / konvexe Kostenfunktionen erhält man übrigens im Wesentlichen als Umkehrfunktionen der ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion in dem Bereich, wo letztere streng wächst. Hat man einen konstanten Preis q pro Faktoreinheit, so sind nämlich die (auf diesen einzigen Faktor bezogenen) Kosten für die Erzeugung des Output x gegeben durch $K(x) = K_{\text{fix}} + q \cdot r(x)$, wobei $r(x)$ die für die Produktion von x Output–Einheiten erforderliche Menge von Faktoreinheiten ist, d.h. $r(x)$ ist die Umkehrfunktion der Produktionsfunktion $x(r)$. Bis auf eine vertikale Verschiebung und Skalierung mit dem Faktor q ist $K(x)$ also die Umkehrfunktion zu $x(r)$ und daher ertragsgesetzlich vom konkav / konvexen Typ mit Schwelle des Ertragsgesetzes $x_0 = x(r_0)$.

Als ertragsgesetzliche mathematische Ansatzfunktionen eignen sich zum Beispiel Polynomfunktionen, wobei der Grad natürlich ≥ 3 sein muss, sonst gibt es keinen Wendepunkt. Ist $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, so haben wir $p''(x) = 6ax + 2b$, $p'''(x) = 6a \neq 0$, also ist $x_0 = \frac{-b}{3a}$ eindeutiger Wendepunkt, und die Bedingung $x_0 > 0$ erfordert, dass a, b entgegengesetztes Vorzeichen haben. Die Bedingung $p'(0) \geq 0$ ist äquivalent mit $c \geq 0$ die Bedingung $p'(x_0) > 0$ mit $3a(\frac{-b}{3a})^2 + 2b(\frac{-b}{3a}) + c > 0$ bzw. $c > \frac{b^2}{3a}$. Da p'' auf $[0, x_0]$ keinen Vorzeichenwechsel hat, also p' dort streng monoton ist, folgt aus $p'(0) \geq 0$, $p'(x_0) > 0$ automatisch $p' > 0$ auf $]0, x_0]$, so dass p auf $[0, x_0]$ und auch noch etwas über x_0 hinaus streng wachsend ist. Ist schließlich noch $d = p(0) \geq 0$, so folgt auch $p \geq 0$ auf $[0, x_0]$ (und noch etwas über x_0 hinaus) und im konkav / konvexen Fall $a > 0$ sogar $p > 0$ und $p' > 0$ auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$. Im konvex / konkaven Fall $a < 0$ dagegen hat p genau eine Nullstelle $x_{\max}$ in $]x_0, \infty[$, weil $p(x_0) > 0$, $\lim_{x \to \infty} p(x) = -\infty$ und p streng konkav ist auf $[x_0, \infty[$. Auf dem Intervall $[0, x_{\max}]$ ist p dann nichtnegativ und somit ertragsgesetzlich. Wir fassen zusammen:

> $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist eine *ertragsgesetzliche Polynomfunktion* vom konkav / konvexen Typ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, genau wenn $a > 0,\ b < 0,\ d \geq 0$ und $c > \dfrac{b^2}{3a}$ ist;
>
> $p(x)$ ist ertragsgesetzlich vom konvex / konkaven Typ auf $[0, z]$, genau wenn $a < 0,\ b > 0,\ d \geq 0,\ c > \dfrac{b^2}{3a},\ z > \dfrac{-b}{3a}$ und $p(z) \geq 0$ ist;
>
> $x_0 = \dfrac{-b}{3a}$ ist in beiden Fällen die Schwelle des Ertragsgesetzes.

Das lässt immer noch einige Freiheit für die Wahl der Parameter a, b, c, d, die man ausnutzen kann, um die Polynomfunktion evtl. vorliegenden empirischen Daten über die mathematisch zu modellierende Funktion anzupassen. Das ist die eigentliche Rechtfertigung für den in der Wirtschaftswissenschaft anzutreffenden kubischen Ansatz $ax^3 + bx^2 + cx + d$ für eine ertragsgesetzliche ökonomische Funktion; denn eine ökonomische Gesetzmäßigkeit, die auf diesen Ansatz führt, gibt es wohl kaum.

Es gibt Situationen, in denen eine ertragsgesetzliche Funktion f vom konvex / konkaven Typ mit endlichem Limes $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ("Sättigungsgrenze") sinnvoll ist. Bei Produktionsvorgängen z.B. kann man sich vorstellen, dass beliebig hoher Faktoreinsatz letztlich nicht mehr zu einer Produktionssteigerung führt, sondern "durch den Schornstein geht", ohne dass der Output noch nennenswert steigt (und auch ohne dass er abnimmt). Für solche Fälle sind Polynomfunktionen zur mathematischen Modellierung natürlich ungeeignet. Stattdessen lässt sich die

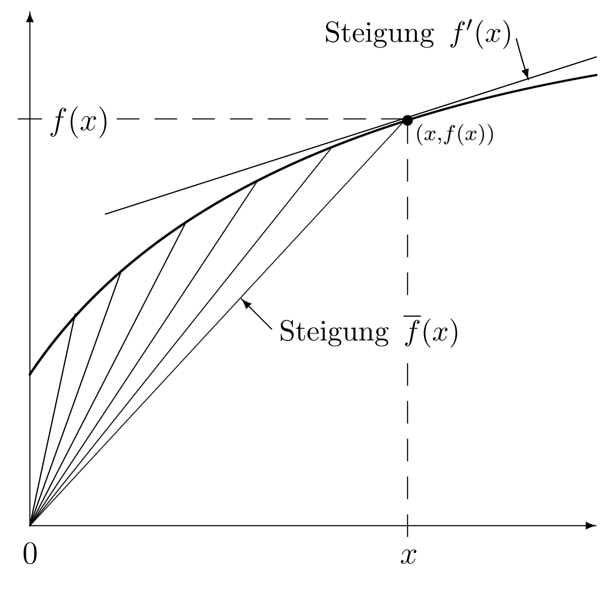
> *logistische ertragsgesetzliche Funktion* vom konvex / konkaven Typ
> $f(x) = \dfrac{a}{1+b\mathrm{e}^{-cx}}$ mit $a>0,\ c>0$ und $b>1$ oder
>
> $g(x) = \dfrac{a(1-\mathrm{e}^{-cx})}{1+b\mathrm{e}^{-cx}}$ mit $a>0,\ c>0$ und $b>1$;
>
> und Schwelle des Ertragsgesetzes $x_0 = \dfrac{1}{c}\ln b$

verwenden. Man hat hier $f'(x) = \frac{abc\mathrm{e}^{-cx}}{(1+b\mathrm{e}^{-cx})^2} > 0$ und $f''(x) = abc\mathrm{e}^{-cx}\frac{(1+b\mathrm{e}^{-cx})(-c)+2bc\mathrm{e}^{-cx}}{(1+b\mathrm{e}^{-cx})^3} = ab^2c^2\mathrm{e}^{-cx}(\mathrm{e}^{-cx}-\frac{1}{b})/(1+b\mathrm{e}^{-cx})^3$. Die Bedingung $b>1$ garantiert die Existenz genau einer Nullstelle $x_0 = \frac{1}{c}\ln b$ von f'' in $\mathbb{R}_{>0}$, und dort hat f'' einen Vorzeichenwechsel vom Typ $+/-$ (das sieht man an der Formel für $f''(x)$ direkt viel leichter als durch Berechnung von $f'''(x_0)$), also liegt in x_0 ein Wendepunkt vom konvex / konkaven Typ vor. Die zweite angegebene Funktion $g(x) = \frac{a(1-\mathrm{e}^{-cx})}{1+b\mathrm{e}^{-cx}}$ brauchen wir nicht separat zu diskutieren, sondern es genügt zu bemerken, dass sie gleich $\frac{1+b}{b}f(x) - \frac{a}{b}$ ist und daher dieselben Eigenschaften hat, wie sie für $f(x)$ festgestellt wurden. Der Grund für die Einführung der zweiten Funktion ist, dass sie den Anfangswert $g(0)=0$ hat im Unterschied zu $f(0) = \frac{a}{1+b}$. Beide Funktionen haben den Grenzwert a bei $x\to\infty$.

3) Wir diskutieren die **Durchschnittsfunkton einer neoklassischen Funktion** $f(x)$, also die Funktion $\overline{f}(x) = \dfrac{1}{x}f(x)$ auf $\mathbb{R}_{>0}$. Es gilt $\overline{f}(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} + \frac{f(0)}{x}$, und die Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ sind fallend und $> f'(x)$ wegen der strengen Konkavität von f. Da $f(0)\geq 0$ ist, also auch $\frac{f(x)}{x}$ streng fallend (außer wenn $f(0)=0$), folgt:

- *Die Durchschnittsfunktion $\overline{f}(x)$ zu einer neoklassischen Funktion $f(x)$ ist streng fallend und größer als die Grenzfunktion $f'(x)$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.*

Graphisch kann man sich den Wert $\overline{f}(x) = \frac{1}{x}f(x)$ veranschaulichen als Steigung des "Fahrstrahls" von $(0,0)$ durch den Punkt $(x, f(x))$ auf dem Funktionsgraphen. Für nichtnegative und streng konkave Funktionen f ist diese Steigung größer als die Tangentensteigung $f'(x)$ im Punkt $(x, f(x))$ und nimmt ab, wenn man mit dem Punkt $(x, f(x))$ von links nach rechts auf dem Graphen "entlangfährt". (Die Monotonie der Funktion braucht man bei diesen Überlegungen gar nicht.)

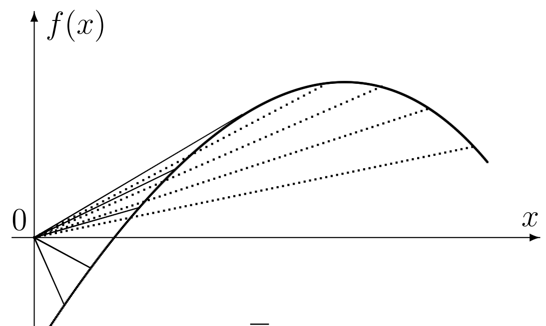


Da $\overline{f}$ fallend und nichtnegativ ist, existiert ein endlicher Limes $\overline{f}(\infty) := \lim_{x\to\infty} \overline{f}(x) \geq 0$. Dies ist die Steigung der Grenzlage der Fahrstrahlen, wenn ihr Endpunkt auf dem Graphen unbeschränkt nach rechts fährt. Wegen der Konkavität von f ist auch f' fallend und hat ebenfalls einen endlichen Limes $f'(\infty) = \lim_{x\to\infty} f'(x) \geq 0$. Tatsächlich gilt:

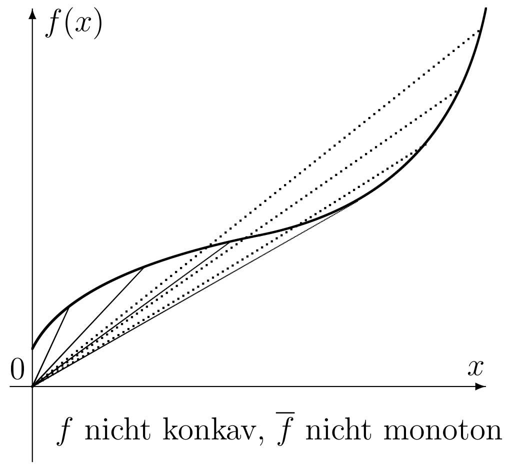
- $\overline{f}(\infty) = f'(\infty) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, *d.h. die Durchschnittsfunktion* $\overline{f}(x)$ *und die Grenzfunktion* $f'(x)$ *haben denselben endlichen, nichtnegativen Limes bei* $x \to \infty$.

Dies kann man aus der Grenzwertregel von L'Hospital (s.u.) ablesen, die hier $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{1}$ besagt, wenn $f(x) \to \infty$ bei $x \to \infty$. (Falls dagegen $f(x)$ beschränkt bleibt bei $x \to \infty$, so ist wegen $0 \leq f'(x) < \overline{f}(x) = \frac{1}{x} f(x)$ die Behauptung klar.) Alternativ kann man wie folgt argumentieren: Für $0 < a < x$ ist $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \frac{x-a}{x} + \frac{f(a)}{x}$. Der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ liegt zwischen $f'(x)$ und $f'(a)$, ist also beliebig nahe bei $f'(\infty)$, wenn a groß ist. Der Faktor $\frac{x-a}{x}$ ist beliebig nahe bei 1 und $\frac{f(a)}{x}$ beliebig nahe bei 0, wenn x genügend viel größer als a ist. Damit ist $|\frac{f(x)}{x} - f'(\infty)|$ so klein wie man will für hinreichend große x, und dies ist gerade, was die Grenzwertaussage $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = f'(\infty)$ bedeutet.

Wenn f teilweise negative Werte hat oder nicht durchweg konkav ist, so ist die Durchschnittsfunktion $\overline{f}$ im Allgemeinen nicht mehr monoton, wie einfache Beispiele und die folgenden Abbildungen zeigen.



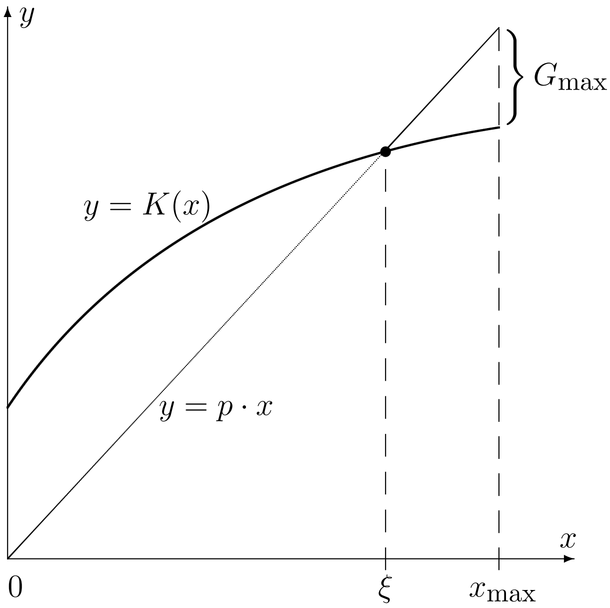
$f(0) < 0$, $\overline{f}$ nicht monoton



f nicht konkav, $\overline{f}$ nicht monoton

4) Als ökonomische Anwendung von 3) diskutieren wir den **Gewinn bei neoklassischen Kosten und konstantem Marktpreis**. Ist $K(x)$ eine neoklassische Kostenfunktion, so sind gemäß 3) die Stückkosten $k(x) = \frac{1}{x} K(x)$ streng fallend auf $\mathbb{R}_{>0}$ und größer als die ebenfalls streng fallenden Grenzkosten $K'(x)$, wobei beide Funktionen denselben endlichen Limes $k(\infty) = K'(\infty) \geq 0$ besitzen, was bedeutet, dass Grenzkosten $K'(x)$ und Stückkosten $k(x)$ für große Werte des Output x praktisch gleich sind. Ist für das Produkt ein konstanter Marktpreis gegeben und unterstellt, dass beliebige Mengen des Produkts hergestellt und am Markt zu diesem Preis abgesetzt werden können, so ist Produktion mit Gewinn genau dann möglich, wenn der Marktpreis p größer ist als der Stückkostenlimes $k(\infty)$. Dann ist nämlich der Preis p auch größer als die Stückkkosten $k(x)$ für hinreichend großen Output x, also der Gewinn $G(x) = p \cdot x - K(x) = x \cdot (p - k(x))$ positiv, während im Fall $p \leq k(\infty)$ die Stückkosten $k(x)$ bei jedem Produktionsumfang den Marktpreis übersteigen, so dass kein Gewinn möglich ist (beachte $k(\infty) < k(x)$ für alle $x > 0$, da k streng fallend ist).

Die Gewinnzone im Fall $p > k(\infty)$ ist $]0,\infty[$, wenn $K(x) < p \cdot x$ ist für alle $x > 0$ (bei positiven Fixkosten ist dieser Fall natürlich ausgeschlossen), bzw. andernfalls das Intervall $]\xi,\infty[$ mit der eindeutigen Lösung $x = \xi$ in $\mathbb{R}_{>0}$ der Gleichung $k(x) = p$. (Die Lösung existiert dann bei stetigen Stückkosten nach dem Zwischenwertsatz, weil $k(x) \geq p$ ist für gewisse p und $k(\infty) < \infty$; sie ist eindeutig wegen der strengen Monotonie von k.)



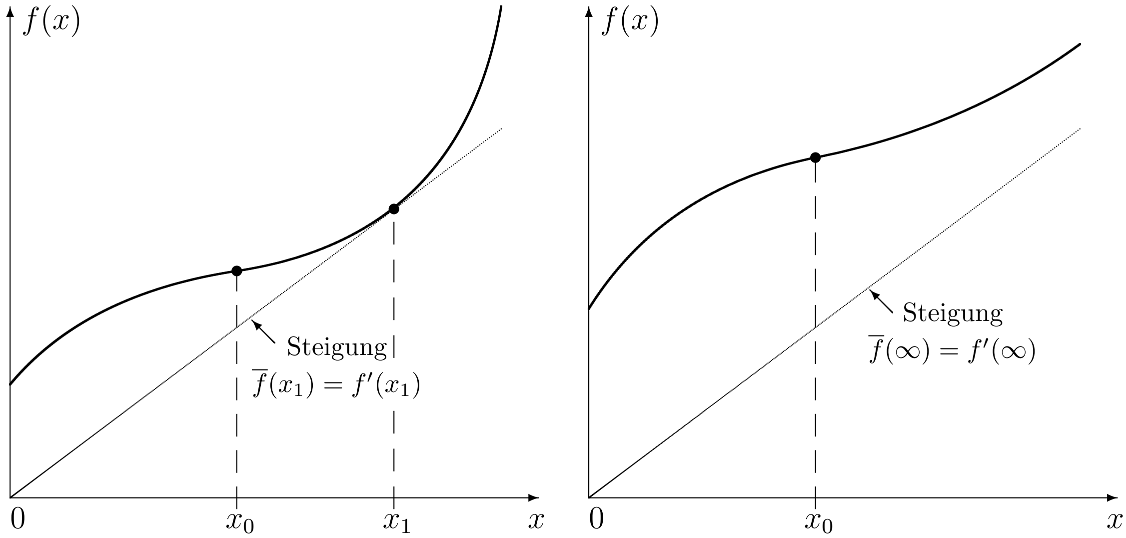
Geometrisch findet man den linken Randpunkt ξ der Gewinnzone als den Rechtswert des Schnittpunktes der "Erlösgeraden" $y = p \cdot x$ mit der "Kostenkurve" $y = K(x)$ rechts von der vertikalen Achse. Wegen $G'(x) = \frac{d}{dx}[p \cdot x - K(x)] = p - K'(x) > p - k(x) = \frac{1}{x}G(x) > 0$ in der Gewinnzone wächst dort der Gewinn mit zunehmendem Output. Also wird ein Unternehmer, der sich in dieser glücklichen Kosten– und Marktsituation befindet, den bei seinen Kapazitätsgrenzen maximal möglichen Output $x = x_{\max}$ produzieren, sofern $x_{\max} > \xi$ ist. Andernfalls kann er im Rahmen seiner Kapazitätsgrenzen keinen Gewinn erzielen.

5) Wir diskutieren die **Durchschnittsfunktion einer ertragsgesetzlichen Funktion** f **vom konkav / konvexen Typ**. Auf dem Intervall $[0, x_0]$ bis zur Schwelle x_0 des Ertragsgesetzes (also dem Wendepunkt von f, der beim konkav / konvexen Typ die absolute Minimumstelle von f' auf $[0,\infty[$ ist) verhält sich dann f neoklassisch. Also entnehmen wir aus 3), dass $\overline{f}(x) = \frac{1}{x}f(x)$ streng fällt und $> f'(x)$ ist auf $]0, x_0]$. Die Ungleichung $\overline{f}(x) > f'(x)$ gilt aus Gründen der Stetigkeit auch noch ein Stück rechts von x_0, und die Ableitungsberechnung $\overline{f}\,'(x) = \frac{1}{x}[f'(x) - \overline{f}(x)]$ zeigt, dass $\overline{f}(x)$ auch auf diesem Stück streng fallend ist mit $\overline{f}\,' < 0$ (obwohl f rechts von x_0 nicht mehr konkav, sondern streng konvex ist). Da f rechts von x_0 progressiv wächst, überschreiten die Werte $f(x)$ bei $x \to \infty$ natürlich alle Schranken, d.h. es gilt $f(\infty) := \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Nun ist aber $xf'(x) - f(x)$ streng wachsend auf $[x_0,\infty[$ wegen $\frac{d}{dx}[xf'(x) - f(x)] = xf''(x) + f'(x) - f'(x) = xf''(x) > 0$ für $x > x_0$, also hat $\overline{f}\,'(x) = \frac{1}{x^2}[xf'(x) - f(x)]$ höchstens eine Nullstelle in $[x_0,\infty[$ und ist negativ nahe x_0 und auf $]0, x_0[$. Es gibt daher folgende Alternative: *Entweder* besitzt $\overline{f}\,'$ genau eine Nullstelle x_1 (bzw. äquivalent $f'(x) - \overline{f}(x) = 0$ genau eine Lösung x_1) in $\mathbb{R}_{>0}$, und dann ist $x_1 > x_0$ und $\overline{f}\,'$ hat einen Vorzeichenwechsel $-/+$ in x_1, so dass x_1 eindeutige absolute Minimumstelle von $\overline{f}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist. *Oder* $\overline{f}\,'$ ist überall auf $\mathbb{R}_{>0}$ negativ und somit $\overline{f}$ streng fallend auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$. Wie in 3) sieht man außerdem, dass die für $x \geq x_0$ streng wachsende Grenzfunktion f' einen Limes $f'(\infty) = \lim_{x\to\infty} f'(x) \in]f'(x_0),\infty]$ besitzt, der nun allerdings auch den Wert ∞ haben kann, und dass die Durchschnittsfunktion $\overline{f}(x)$ denselben Limes $\overline{f}(\infty) = f'(\infty)$ hat bei $x \to \infty$. Im zweiten Fall der Alternative ist $\overline{f}(\infty) < \infty$, und das Minimum (genauer: das Infimim) von $\overline{f}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ wird bei $x \to \infty$ erreicht, also setzen wir in diesem Fall formal $x_1 = \infty$. In beiden Fällen gilt dann also $f'(x_1) = \overline{f}(x_1)$. Wir fassen zusammen:

Für die Durchschnittsfunktion $\overline{f}$ einer ertragsgesetzlichen Funktion f vom konkav / konvexen Typ mit Schwelle x_0 des Ertragsgesetzes gilt:

- *Entweder hat* $\overline{f}$ *genau einen kritischen Punkt* x_1 *im Intervall* $]0,\infty[$, *dann ist* $x_1 > x_0$ *die eindeutige absolute Minimumstelle von* $\overline{f}$ *auf* $\mathbb{R}_{>0}$, *es gilt* $f'(x_1) = \overline{f}(x_1)$, $\overline{f}\,' < 0$ *und* $f' < \overline{f}$ *auf* $]0, x_1[$ *sowie* $\overline{f}\,' > 0$ *und* $f' > \overline{f}$ *auf* $]x_1, \infty[$, *und die Funktionen* $\overline{f}(x)$, $f'(x)$ *haben bei* $x \to \infty$ *denselben Limes* $\overline{f}(\infty) = f'(\infty) \in]\overline{f}(x_1), \infty]$;
- *oder* $\overline{f}$ *ist streng fallend mit* $\overline{f}\,' < 0$ *und* $f' < \overline{f}$ *überall auf* $\mathbb{R}_{>0}$, *dann ist der Limes* $\overline{f}(\infty) = f'(\infty) \in]f'(x_0), \overline{f}(x_0)[$ *endlich und gleich dem Infimum von* $\overline{f}$ *auf* $]0,\infty[$.



Fall $x_0 < x_1 < \infty$
x_1 *absolute Minimumstelle von* $\overline{f}$

Fall $x_1 = \infty$
Infimum von $\overline{f}(x)$ *bei* $x \to \infty$

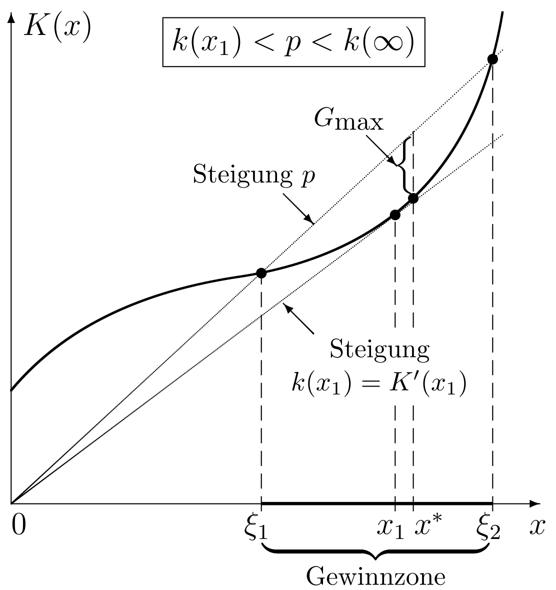
Geometrisch findet man die Minimumstelle x_1 der Stückfunktion $\overline{f}$ im ersten Fall, indem man die positive horizontale Achse um 0 dreht, bis sie den Graphen berührt; diese erste Berührung erfolgt dann im Punkt $(x_1, f(x_1))$ und die gedrehte Achse ist dort die Tangente an den Graphen. Im zweiten Fall gibt es eine gedrehte Lage der Achse, die den Graphen "gerade noch nicht" schneidet, d.h. bei beliebig geringer Vergrößerung des Drehwinkels schneidet die gedrehte Achse den Graphen. Hier ist die in diese Grenzlage gedrehte Achse mit Steigung $f'(\infty) = \overline{f}(\infty)$ gewissermaßen parallel zur Tangente an den Graphen im unendlich fernen Punkt. (Die Tangente im unendlich fernen Punkt erhält man durch maximale Verschiebung der in die Grenzlage gedrehten Achse nach oben, so dass der Graph über $[x_0, \infty[$ noch über der verschobenen Geraden bleibt.)

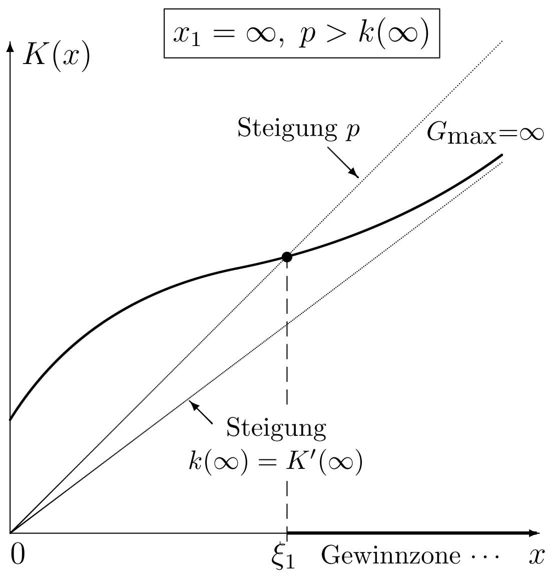
6) Als Anwendung von 5) diskutieren wir den **Gewinn bei ertragsgesetzlichen Kosten und konstantem Marktpreis**. Eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion $K(x)$ ist vom konkav / konvexen Typ; die Kosten wachsen anfangs degressiv, nach Überschreiten eines Schwellenwertes x_0 aber progressiv. Der Schwellenwert des Ertragsgesetzes x_0 ist hier die eindeutige Minimumstelle der Grenzkostenfunktion $K'(x)$ in $\mathbb{R}_{>0}$. Steigt der Output x über diesen Wert, so nehmen die Kosten für Produktion einer Mehreinheit also zu. Die Stückkosten $k(x)$ fallen (zunächst) allerdings noch weiter. Das Minimum der Stückkosten wird an einer Stelle $x_1 > x_0$ erreicht oder bei $x_1 = \infty$ (d.h. bei $x \to \infty$). Diese Stelle x_1 heißt **Betriebsoptimum** und ist gekennzeichnet durch die Gleichung $K'(x_1) = k(x_1)$.

- *Im Betriebsoptimum (und nur dort) sind Grenzkosten und Stückkosten gleich.*

Das gilt formal auch im Fall $x_1 = \infty$, wenn man $K'(\infty)$ und $k(\infty)$ als Grenzwerte bei $x \to \infty$ interpretiert. Der Fall eines endlichen Betriebsoptimums x_1 liegt vor, wenn die variablen Kosten bei $x \to \infty$ superlinear wachsen (d.h. $\frac{1}{x}K_{\text{var}}(x) \to \infty$ bei $x \to \infty$) oder wenigstens linear mit einer Steigung größer als ein Stückkostenwert $k(\xi)$ (d.h. es ist $\frac{1}{x}K_{\text{var}}(x) > k(\xi)$ für alle hinreichend großen Werte des Output x und dann auch $k(x) > k(\xi)$ für hinreichend große x, so dass die anfangs fallende Stückkostenfunktion ein Minimum auf $]0,\infty[$ annimmt). Im Fall $x_1 = \infty$ gilt dagegen $\frac{1}{x}K_{\text{var}}(x) \le k(x) < k(\xi)$ für alle $x > \xi > 0$ wegen des monotonen Fallens von k auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$. All dies wurde schon in 5) gezeigt.

Liegt nun ein konstanter Marktpreis vor, so ist im Prinzip, d.h. bei Herstellbarkeit und Absetzbarkeit beliebiger Mengen des produzierten Gutes, eine Produktion mit Gewinn genau dann möglich, wenn der Marktpreis p größer ist als die Betriebs–optimalen Stückkosten $k(x_1)$ — darin besteht die *ökonomische Bedeutung des Betriebsoptimums*. Genau im Fall $p > k(x_1)$ gibt es nämlich Outputwerte x mit $p > k(x)$ (z.B. $x = x_1$, wenn endlich, und x groß genug, wenn $x_1 = \infty$), so dass der Gewinn $G(x) = p \cdot x - K(x) = x \cdot (p - k(x))$ positiv ausfällt. (Das gilt auch im Fall $x_1 = \infty$.) Die Gewinnzone ergibt sich dann durch Schneiden der “Erlösgeraden” $y = p \cdot x$ mit der “Kostenkurve” $y = K(x)$. Mit Hilfe der strengen Konvexität der Gewinnfunktion auf $[0, x_0]$ und ihrer strengen Konkavität auf $[x_0, \infty[$ überlegt man leicht, dass die Gewinnzone entweder ein beschränktes Intervall $]\xi_1, \xi_2[\subset \mathbb{R}_{>0}$ ist mit x_1 im Inneren oder ein unbeschränktes Intervall $]\xi_1, \infty[$, und zwar letzteres genau wenn $p \ge k(\infty)$ ist. Das Gewinnmaximum wird nun sicher nicht an einer Stelle $x \in]0, x_1]$ erreicht, weil dort $G'(x) = p - K'(x) \ge p - k(x) = \frac{1}{x}G(x) > 0$ ist, wenn x in der Gewinnzone liegt (beachte, dass gemäß 5) gilt $K'(x) < k(x)$ für $x \le x_1$). Also liegt die Stelle x^* maximalen Gewinns rechts von x_1, wenn eine existiert; wegen der strengen Konkavität der Gewinnfunktion über $[x_0, \infty[$ kann es im Übrigen höchstens eine Gewinnmaximumstelle geben. Ist die Gewinnzone $]\xi_1, \xi_2[$ beschränkt, so existiert darin gewiss eine Maximumstelle x^* des Gewinns, weil G auf $[\xi_1, \xi_2]$ ein positives Minimum annimmt und am Rande verschwindet. Diese Stelle ergibt sich dann aus der Bedingung $G'(x^*) = 0$ als eindeutige Lösung der Gleichung $K'(x) = p$ im Intervall $]x_1, \infty[$. Ist die Gewinnzone aber unbeschränkt, also $\delta := p - k(\infty) > 0$, so liegt der Stückgewinn $g(x) = p - k(x)$ über dem positven Wert $\frac{1}{2}\delta$ für alle hinreichend großen Output–Werte x, also ist $\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot g(x) = \infty$, d.h. es lässt sich im Prinzip beliebig großer Gewinn erzielen und das Gewinnmaximum (genauer: das unendliche Gewinnsupremum) wird formal nur in $x^* = \infty$ erreicht.





Wir fassen zusammen, was wir für den Gewinn bei ertragsgesetzlichen Kosten und konstantem Marktpreis gefunden haben:

- *Genau wenn der Marktpreis* p *größer ist als die Betriebs–optimalen Stückkosten* $k(x_1)$*, kann mit Gewinn produziert werden;*
- *ist* p *auch nicht kleiner als der Stückkostenlimes* $k(\infty)$ *im Unendlichen, so ist die Gewinnzone ein unbeschränktes Intervall* $]\xi_1, \infty[\subset \mathbb{R}_{>0}$ *und der Gewinn wird beliebig groß bei* $x \to \infty$ *(formal* $x^* = \infty$*,* $G_{max} = G(x^*) = \infty$*);*
- *gilt dagegen* $k(x_1) < p < k(\infty)$*, so ist die Gewinnzone ein beschränktes Intervall* $]\xi_1, \xi_2[\subset \mathbb{R}_{>0}$*, das das Betriebsoptimum* x_1 *im Inneren enthält, und das Gewinnmaximum* $G_{max} = G(x^*)$ *wird an einer eindeutigen Stelle* $x^* > x_1$ *erreicht.*

Interessant ist hier vor allem die Feststellung, dass der Output maximalen Gewinns x^* immer größer ist als das Betriebsoptimum x_1 (außer $x_1 = \infty$); der Gewinn wird also nicht, wie man vielleicht meinen könnte, bei Produktion mit minimalen Stückkosten maximiert, sondern bei einem größeren Output mit ungünstigeren Stückkosten.

Dass bei $p > k(x_1)$ mit Gewinn produziert werden kann, gilt dabei natürlich nur "im Prinzip", d.h. unter der Annahme, dass beliebig große Mengen des Produkts hergestellt und am Markt auch abgesetzt werden können (zum konstanten Preis p). In der Praxis wird ein Unternehmer eine Kapazitätsgrenze $x \le x_{\max}$ der Produktion und / oder des Marktes zu berücksichtigen haben. Ist $x_{\max} \le \xi_1$, so kann er bei dieser Restriktion keinen Gewinn erzielen. Im Fall $x_{\max} \ge x^*$ wird er mit Output $x = x^*$ den maximalen Gewinn erzielen. Ist aber $\xi_1 < x_{\max} < x^*$ oder $\xi_1 < x_{\max}$ und $\xi_2 = \infty$ (also formal $x^* = \infty$), so wird Produktion an der Kapazitätsgrenze $x = x_{\max}$ den maximalen Gewinn abwerfen; denn auf $]\xi_1, x_1[$ ist ja $G' > 0$ wie oben gesehen und auf $[x_1, x^*] \subset [x_0, x^*]$ ist G als streng konkave Funktion mit der Maximumstelle x^* ebenfalls streng wachsend, also erreicht $G(x)$ sein Maximum auf einem Intervall $]\xi_1, x_{\max}] \subset]\xi_1, x^*[$ am rechten Endpunkt $x_{\max}$ (auch im Fall $\xi_2 = \infty$, $x^* = \infty$).

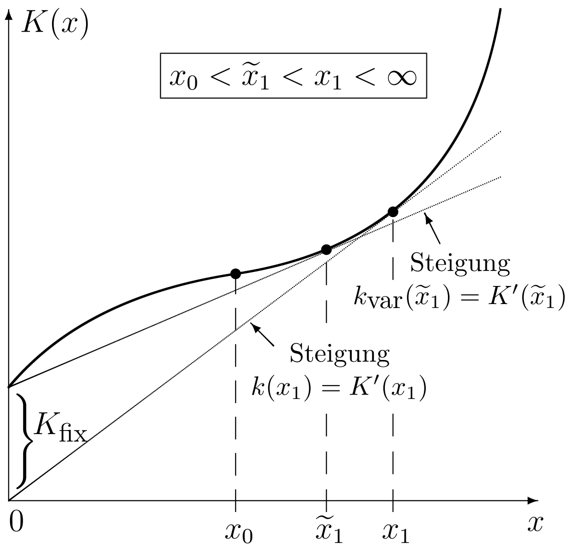
7) Es gibt Situationen, in denen ein Unternehmer bei der Entscheidung über die Durchführung der Produktion und die Höhe des Outputs die Fixkosten ignorieren wird. Ist z.B. der Marktpreis p gefallen und auf einem niedrigeren Niveau stabil als zum Zeitpunkt der Aufnahme der Produktion, so wird der Unternehmer, wenn die Fixkosten K_{fix} schon bezahlt sind oder wenn sie auch bei Einstellung der Produktion anfallen würden, die Entscheidung über die Weiterführung der Produktion allein davon abhängig machen, ob er bei dem gegebenen Marktpreis mit dem Erlös seine *variablen Kosten* $K_{\text{var}}(x) = K(x) - K_{\text{fix}}$ decken kann. (Wenn nein, so wird er die Produktion einstellen; wenn ja, so kann er immerhin seinen durch den Preisverfall möglicherweise eintretenden Verlust mildern.) In einer solchen Situation betrachtet der Unternehmer also die variablen Kosten $K_{\text{var}}(x)$ als die für ihn relevante Kostenfunktion und ignoriert seine Fixkosten.

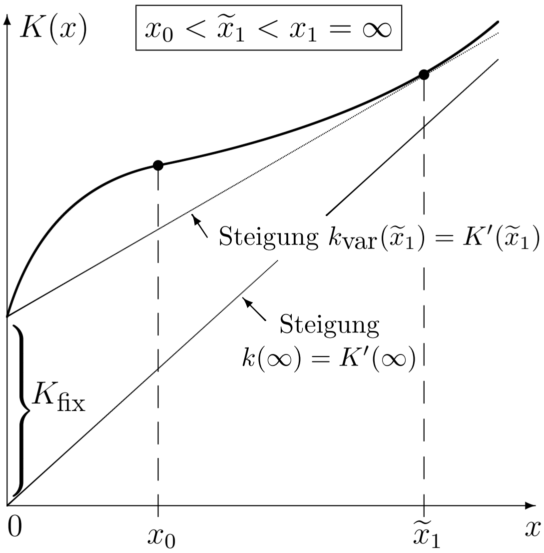
Nun ist mit der Kostenfunktion $K(x)$ offenbar auch die nur um eine subtraktive Konstante differierende Funktion $K_{\text{var}}(x) = K(x) - K_{\text{fix}}$ ertragsgesetzlich mit derselben Schwelle des Ertragsgesetzes. Deshalb kann man die Diskussion in 5) und 6) völlig analog für $K_{\text{var}}(x)$ statt $K(x)$ durchführen. Das Minimum der Stück–variablen Kosten $k_{\text{var}}(x) = \frac{1}{x} K_{\text{var}}(x)$ wird also an einer Stelle $\widetilde{x}_1 > x_0$ erreicht, die **Betriebsminimum** genannt wird. Dabei ist $\widetilde{x}_1$ entweder endlich und dann die eindeutige Minimumstelle von $k_{\text{var}}(x)$ in $]0, \infty[$, wobei $k'_{\text{var}} < 0$ ist auf $]0, \widetilde{x}_1[$ und $k'_{\text{var}} > 0$ auf $]\widetilde{x}_1, \infty[$, oder es ist $\widetilde{x}_1 = \infty$ und $k'_{\text{var}} < 0$ auf ganz $]0,\infty[$. Wegen $k'_{\text{var}}(x) = \frac{1}{x}[K'_{\text{var}}(x) - k_{\text{var}}(x)] = \frac{1}{x}[K'(x) - k_{\text{var}}(x)] > \frac{1}{x}[K'(x) - k(x)] = k'(x)$ und $k'_{\text{var}}(\widetilde{x}_1) = 0$ gilt im endlichen Betriebsminimum $K'(\widetilde{x}_1) = k_{\text{var}}(\widetilde{x}_1)$ und $k'(\widetilde{x}_1) < 0$, also liegt $\widetilde{x}_1$ vor dem Betriebsoptimum x_1, das als die Minimumstelle der Stückkosten $k(x)$ definiert ist (bzw. $x_1 = \infty$ wenn die Stückkosten auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$ fallen). Dabei haben wir natürlich für die Fixkosten $K_{\text{fix}} > 0$ angenommen.

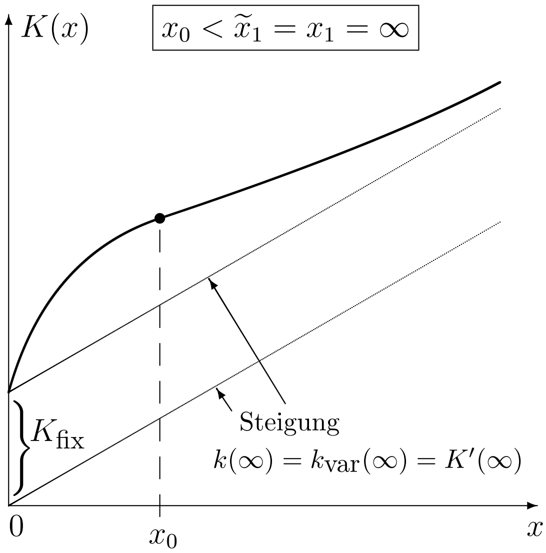
- *Das Betriebsminimum liegt, wenn endlich, echt zwischen der Schwelle des Ertragsgesetzes und dem Betriebsoptimum;*
- *im Betriebsminimum (und nur dort) sind Grenzkosten und Stück–variable Kosten gleich.*

Das gilt formal auch im Fall $\widetilde{x}_1 = \infty$, wenn man dann $K'(\infty)$ und $k_{\text{var}}(\infty)$ als Grenzwerte bei $x \to \infty$ definiert. In diesem Fall ist natürlich auch $x_1 = \infty$ und $K'(\infty) = k(\infty)$. Wegen $k(x) = k_{\text{var}}(x) + \frac{1}{x}K_{\text{fix}}$ haben Stückkosten und Stück–variable Kosten sowieso denselben Limes bei $x \to \infty$.

Geometrisch findet man das Betriebsminimum $\widetilde{x}_1$, indem man die um K_{fix} nach oben verschobene horizontale Achse um den Anfangspunkt $(0, K_{\text{fix}})$ des Kostengraphen dreht, bis sie den Graphen berührt; diese erste Berührung erfolgt dann im Punkt $(\widetilde{x}_1, K(\widetilde{x}_1))$ und die gedrehte Achse ist dort die Tangente an den Graphen. Im Fall $\widetilde{x}_1 = \infty$ gibt es eine gedrehte Lage der Achse, die den Graphen “gerade noch nicht” schneidet, d.h. bei beliebig geringer Vergrößerung des Drehwinkels schneidet die gedrehte Achse den Graphen. Hier ist die in diese Grenzlage gedrehte Achse mit Steigung $K'(\infty) = k_{\text{var}}(\infty)$ parallel zur Tangente an den Graphen im unendlich fernen Punkt ebenso wie auch die Parallele durch $(0,0)$, mit derselben Steigung $k(\infty)$.







Schwelle des Kostenertragsgesetzes x_0, Betriebsminimum $\widetilde{x}_1$ und Betriebsoptimum x_1

Die *ökonomische Bedeutung des Betriebsminimums* besteht in Folgendem, wenn ein konstanter Marktpreis vorliegt und unterstellt ist, dass beliebig große Mengen produziert und abgesetzt werden können:

- *Genau wenn der Marktpreis* p *größer ist als die Betriebs–minimalen Stück–variablen Kosten* $k_{\text{var}}(\widetilde{x}_1)$*, ist eine Produktion möglich, deren Erlös die variablen Kosten deckt*

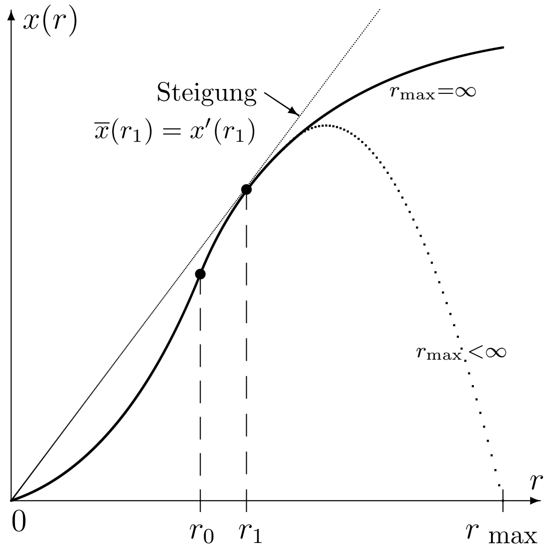
(bzw. übersteigt, genauer gesagt; das gilt auch im Fall $\widetilde{x}_1 = \infty$.) Für die Zone $]\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2[$, in der der Erlös die variablen Kosten übersteigt, gilt dann dieselbe Beschreibung wie früher für die Gewinnzone $]\xi_1, \xi_2[$, wobei nun $K_{\text{var}}(x)$ als Kostenfunktion zu nehmen ist, da die Fixkosten ja ignoriert werden. Natürlich ist $]\xi_1, \xi_2[\subset]\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2[$, aber die Gewinnzone ist leer, wenn der Preis nur über den Betriebs–minimalen Stück–variablen Kosten $p > k_{\text{var}}(\widetilde{x}_1)$ liegt und nicht über den Betriebs–optimalen Stückkosten $k(x_1)$. In einem solchen Fall ist dann eben noch eine Produktion mit Deckung der variablen Kosten möglich, aber keine, die auch noch die Fixkosten deckt. Der Wert x^* des Output, für den die Differenz $p \cdot x - K_{\text{var}}(x)$ maximal wird, ist größer als das Betriebsminimum und berechnet sich eindeutig aus $p = K'_{\text{var}}(x^*)$ was wegen $K'_{\text{var}} = K'$ dieselbe Bedingung ist wie die für die Gewinnmaximumstelle in 6). Also ist x^* hier dieselbe Stelle wie in 6), falls Produktion mit Gewinn möglich ist, und das ist auch klar, weil sich ja $p \cdot x - K_{\text{var}}(x)$ von $G(x)$ nur durch die Fixkostenkonstante unterscheidet.

Kurzfristig kann es sinnvoll sein, die Produktion bei einem Marktpreis unterhalb der Betriebs–optimalen Stückkosten aufrechtzuerhalten, nämlich wenn die Fixkosten auch während einer Produktionsunterbrechung weiterlaufen würden und eine Steigerung des Marktpreises zu erhoffen ist. In dieser Situation wird der Unternehmer den Output $x = x^*$ produzieren, wenn der Marktpreis noch über den Betriebs–minimalen Stück–variablen Kosten liegt und x^* nicht über seiner Kapazitätsgrenze $x_{\max}$, während er $x = x_{\max}$ wählt, wenn $x_{\max}$ kleiner ist als x^*, aber noch größer als $\widetilde{\xi}_1$. Andernfalls, also bei Marktpreisen unter den im Rahmen seiner Kapazität kleinstmöglichen Stück–variablen Kosten, muss er die Produktion unterbrechen, weil er damit seine Verluste nur noch vergrößern würde.

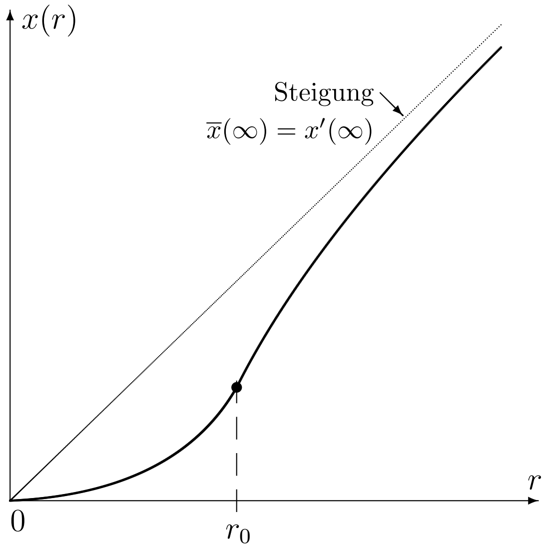
Es muss betont werden, dass alle Ergebnisse aus 6) und 7) wesentlich auf der Konstanz des Marktpreises, also auf der Linearität der Erlösfunktion $E(x) = p \cdot x$ beruhen. Bei komplizierteren Erlösfunktionen $E(x) = p(x) \cdot x$ mit vom angebotenen Output abhängigem Marktpreis sind allgemeine Aussagen über den Gewinn bei ertragsgesetzlichen Kosten nicht mehr möglich. Schon im einfachen Fall einer linear fallenden Preisfunktion $p(x)$ ist $E(x)$ quadratisch und streng konkav, und die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$ ist konkav im konvexen Bereich der Kosten, aber beliebig im konkaven Bereich der Kosten. (*Jede* differenzierbare Funktion ist Differenz von zwei geeigneten konkaven Funktionen.) Ein Gewinnmaximum kann dann auch im konkaven Bereich der Kostenfunktion liegen.

8) Die **Durchschnittsfunktion einer ertragsgesetzlichen Funktion vom konvex / konkaven Typ** kann man völlig analog zu 5) diskutieren, jedenfalls wenn der Funktionswert Null ist an der Stelle Null, wie es bei Produktionsfunktionen der Fall ist (ohne Faktoreinsatz kein Output). Man kann sogar durch Übergang zur Umkehrfunktion im Bereich des strengen Wachstums die Diskussion formal auf die Analyse in 5) zurückführen. Wir formulieren daher nur die Ergebnisse und legen dabei eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion $x(r)$ vom konvex / konkaven Typ mit $x(0) = 0$ und Schwelle des Ertragsgesetzes r_0 zu Grunde, die hier die eindeutige absolute Maximumstelle der Grenzproduktivität $x'(r)$ ist; $\overline{x}(r) = \frac{1}{r}x(r)$ bezeichnet den durchschnittlichen Produktionsertrag und $r_{\max} \leq \infty$ den maximal möglichen Faktoreinsatz (also $x(r_{\max}) = 0$, wenn $r_{\max} < \infty$, bzw. $r_{\max} = \infty$, wenn $x(r) > 0$ für alle $r > 0$).

- *Entweder hat* $\overline{x}$ *genau einen kritischen Punkt* r_1 *im Intervall* $]0, r_{\max}[$*; dann ist* $r_1 > r_0$ *eindeutige absolute Maximumstelle von* $\overline{x}$ *auf* $]0, r_{\max}[$*, es gilt* $x'(r_1) = \overline{x}(r_1)$*,* $\overline{x}\,' > 0$ *und* $x' > \overline{x}$ *auf* $]0, r_1[$ *sowie* $\overline{x}\,' < 0$ *und* $x' < \overline{x}$ *auf* $]x_1, r_{\max}[$*, und die Funktionen* $\overline{x}(r)$*,* $x'(r)$ *haben im Fall* $r_{\max} = \infty$ *bei* $r \to \infty$ *denselben endlichen Limes* $\overline{x}(\infty) = x'(\infty) \in [0, \overline{x}(r_1)[$*;*
- *oder es ist* $r_{\max} = \infty$ *sowie* $\overline{x}$ *streng wachsend mit* $\overline{x}\,' > 0$ *und* $x' > \overline{x}$ *überall auf* $]0, \infty[$*; dann ist der Limes* $\overline{x}(\infty) = x'(\infty) \in]\overline{x}(r_0), x'(r_0)[$ *endlich und gleich dem Supremum von* $\overline{x}$ *auf* $]0, \infty[$.



Fall $r_0 < r_1 < \infty$
r_1 *absolute Minimumstelle von* $\overline{x}$



Fall $r_1 = \infty$
Supremum von $\overline{x}(r)$ *bei* $r \to \infty$

Geometrisch findet man die Stelle r_1 mit maximalem durchschnittlichen Produktionsertrag im ersten Fall, indem man die positive vertikale Achse um 0 dreht, bis sie den Graphen berührt; diese erste Berührung erfolgt dann im Punkt $(r_1, x(r_1))$ und die gedrehte Achse ist dort die Tangente an den Graphen. Im zweiten Fall gibt es eine gedrehte Lage der Achse, die den Graphen "gerade noch nicht" schneidet, d.h. bei beliebig geringer Vergrößerung des Drehwinkels schneidet die gedrehte Achse den Graphen. Hier ist die in diese Grenzlage gedrehte Achse mit Steigung $x'(\infty) = \overline{x}(\infty)$ gewissermaßen parallel zur Tangente an den Graphen im unendlich fernen Punkt. (Die Tangente im unendlich fernen Punkt erhält man durch maximale Verschiebung der in die Grenzlage gedrehten Achse nach unten, so dass der Graph über $[r_0, \infty[$ noch unter der verschobenen Geraden bleibt.) ■

Wir schließen diesen Paragraphen über die Hauptsätze der Differentialrechnung mit drei Sätzen, die in der Mathematik wichtig, für ökonomische Anwendungen aber weniger bedeutsam sind und deshalb hier auch nur kurz abgehandelt werden. Der erste Satz verallgemeinert den Zwischenstellensatz (Mittelwertsatz), der sagte, dass jeder Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ darstellbar ist als Ableitungswert $f'(\xi)$ an einer Stelle zwischen a und b. Für allgemeinere Quotienten $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ gilt folgende Variante:

SATZ (**verallgemeinerter Zwischenstellensatz der Differentialrechnung**): *Sind f, g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar im Inneren mit $g' \neq 0$ zwischen a und b, so gibt es (mindestens) eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Zum *Beweis* wendet man den Satz von Rolle auf $h(x) = f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)]$ mit $h(a) = h(b)$ an und erhält $a < \xi < b$ mit $0 = h'(\xi) = f'(\xi)[g(b)-g(a)] - g'(\xi)[f(b)-f(a)]$. Mit Division durch $g'(\xi)[g(b) - g(a)]$ folgt die Behauptung (beachte $g(b) - g(a) \neq 0$, weil sonst g' eine Nullstelle zwischen a und b hätte nach Rolle).

Der Satz hat Anwendungen auf die Grenzwertrechnung. Wir betrachten z.B. einen Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$ bei einem Grenzübergang $x \nearrow x_0$ und nehmen $f(x_0) := \lim_{x\nearrow x_0} f(x) = 0$ sowie $g(x_0) = \lim_{x\nearrow x_0} g(x) = 0$ an, so dass der zu berechnende Limes einen "*unbestimmten Ausdruck*" vom Typ $\frac{0}{0}$ darstellt. Natürlich muss dabei der Nenner $g(x) \neq 0$ sein für $x < x_0$ nahe x_0. Zu $x < x_0$ gibt es dann, wenn $g' \neq 0$ ist zwischen x und x_0, eine Stelle $\xi \in]x, x_0[$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Mit $x \nearrow x_0$ strebt auch $\xi \nearrow x_0$. Wenn also $\lim_{x\nearrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so auch $\lim_{x\nearrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und beide Grenzwerte sind gleich. Bei einem unbestimmten Ausdruck vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$ schreibe $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\widetilde{x})}{g(x)-g(\widetilde{x})} \cdot \frac{g(x)-g(\widetilde{x})}{g(x)} \cdot \frac{f(x)}{f(x)-f(\widetilde{x})}$. Der erste Faktor ist gleich $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ mit $\widetilde{x} < \xi < x < x_0$ und liegt nahe bei $\lim_{x\nearrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, wenn dieser Limes existiert und $\widetilde{x} < x_0$ nahe genug bei x_0 ist. Die beiden anderen Faktoren sind wegen $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\nearrow x_0} g(x) = \infty$ beliebig nahe bei 1 für x nahe genug bei x_0, daher ergibt sich insgesamt wieder $\lim_{x\nearrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\nearrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Uneigentliche Grenzstellen, etwa $x_0 = \infty$, kann man behandeln, indem man einfach $\frac{f(1/x)}{g(1/x)}$ bei $x \searrow 0$ betrachtet. Insgesamt ergeben diese Argumente folgenden

SATZ (**Grenzwertregeln von L'Hospital**): *Bei einem Grenzübergang $x \to x_0$, $x \nearrow x_0$, $x \searrow x_0$, $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ gilt*

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wenn erstens der Grenzwert links formal ein unbestimmter Ausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist und zweitens der Limes rechts mit Wert in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ existiert (insbesondere müssen $f'(x)$, $g'(x)$ für x nahe der Grenzlage existieren mit $g'(x) \neq 0$).

BEISPIELE (***zu den Grenzwertregeln von L'Hospital***):

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1 \quad (\text{Typ } \frac{0}{0}).$

(Das sieht man auch aus $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{d}{dx}\big|_{x=0} \sin x = \cos(0) = 1.$)

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \frac{1}{2} \quad (\text{zweimal Typ } \frac{0}{0}).$

Hier wurde die Regel von L'Hospital zweimal hintereinander angewendet; das ist gerechtfertigt, weil nach dem ersten Schritt immer noch ein unbestimmter Ausdruck vom Typ $\frac{0}{0}$ vorliegt und weil der letzte Limes existiert. (Man hätte nach dem ersten Schritt auch $\sin x$ kürzen und $\lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2}$ benutzen können.)

(3) $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \cot x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$

Hier haben wir nach der ersten Umformung zweimal die Regel für den Typ $\frac{0}{0}$ angewandt; erst beim zweiten Mal stößt man auf einen "bestimmten Ausdruck", dessen Grenzwert man wegen Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ einfach als Wert an dieser Stelle ablesen kann.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \ldots = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{n!} = \infty\,.$

Hier ergibt sich n–mal ein unbestimmter Ausdruck vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$ und erst dann ein bestimmter Ausdruck, dessen Limes klar ist. (Natürlich kennen wir das Ergebnis längst aus 1.3; die Exponentialfunktion wächst bei $x \to \infty$ schneller als jede Potenz von x.)

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{2x} = 1$ **???**

Der Limes ist in Wahrheit einfach der Funktionswert an der Stelle $x = 0$, also gleich 2. Die Regel von L'Hospital darf man hier gar nicht anwenden, weil von vorneherein kein unbestimmter Ausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ vorliegt (sondern ein "bestimmter Ausdruck" $\frac{2}{1}$). ■

Das letzte Beispiel illustriert den *häufigsten Fehler*, der gemacht wird, wenn man für jeden zu bestimmenden Limes blindlings die Regel von L'Hospital anwendet: Die Regel gilt eben nur für *unbestimmte Grenzwertausdrücke*! Unbestimmte Grenzwertausdrücke von anderem Typ lassen sich auf die Typen $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zurückführen; zum Beispiel $f(x) - g(x)$ vom Typ $\infty - \infty$ durch Betrachtung von $\mathrm{e}^{f(x)-g(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-g(x)}}{\mathrm{e}^{-f(x)}}$ auf den Typ $\frac{0}{0}$, oder $f(x)\cdot g(x)$ vom Typ $0\cdot\infty$ durch Übergang zu $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ auf den Typ $\frac{0}{0}$, oder auch $f(x)^{g(x)}$ vom Typ 1^∞ bzw. ∞^1 durch Betrachtung von $\ln(f(x)^{g(x)})$ auf die Typen $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$. Im Übrigen wird der Nutzen der Regel von L'Hospital oft überschätzt. In vielen Fällen ist die direkte Berechnung des Limes von $\frac{f(x)}{g(x)}$ einfacher als die Berechnung der Ableitungen f', g' und des Limes von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ oder gar, wenn der immer noch unbestimmt ist, die Berechnung der zweiten Ableitungen f'', g'' und des Limes von $\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Der letzte hier vorgestellte Satz der Differentialrechnung stellt eine Verallgemeinerung der Idee der linearen Approximation dar, die ja grundlegend für das Konzept der Ableitung ist. Bei der linearen Approximation ging es darum, eine gegebene Funktion $f(x)$ nahe einer Stelle x_0 durch eine affin lineare Funktion $\ell(x) = mx + b$ möglichst gut zu approximieren, und es stellte sich in 4.3 heraus, dass es genau eine bestapproximierende lineare Funktion gibt, nämlich $\ell(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, (also $m = f'(x_0)$ und $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$, so dass $\ell(x_0) = f(x_0)$ ist). Die Approximation nahe x_0 ist dann in dem Sinne gut, dass der Fehler $f(x) - \ell(x)$ schneller als $x - x_0$ gegen 0 geht bei $x \to x_0$, dass also gilt $\frac{f(x)-\ell(x)}{x-x_0} \to 0$ bei $x \to 0$.

Besser Approximationsgüte, nämlich einen Fehler von kleinerer Ordnung als $|x - x_0|^n$ bei $x \to x_0$, kann man nun erhoffen, wenn man mit Polynomfunktionen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ vom Grad $\le n$ mit $n > 1$ approximiert. Damit $\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n}$ gegen 0 strebt, ist nach der L'Hospital–Regel notwendig und hinreichend, dass $f^{(k)}(x_0) = p^{(k)}(x_0)$ ist für $k = 0\ldots n$ (denn genau dann kann man die Regel n–mal für den Typ $\frac{0}{0}$ anwenden und erhält am Ende den Grenzwert 0). Schreiben wir das Polynom um in der Form $p(x) = c_n(x-x_0)^n + \ldots + c_1(x-x_0) + c_0$ (was immer geht, indem man $x^j = ((x-x_0)+x_0)^j$ nach der binomischen Formel entwickelt), und berücksichtigen wir $\frac{d^k}{dx^k}\big|_{x=x_0}(x - x_0)^j = 0$ für $k > j$ oder $0 \le k < j$ bzw. $= k! = j!$ für $k = j$, so erhalten wir $p^{(k)}(x_0) = c_k \cdot k!$ und daher $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$ für die Koeffizienten des approximierenden Polynoms. Dieses heißt dann das n–te **Taylor–Polynom** der Funktion f zur Stelle x_0 ("*Entwicklungspunkt*") und leistet tatsächlich die gewünschte gute Approximation. Wesentlich für den praktischen Nutzen der Taylor–Polynome ist, dass der folgende Satz nicht nur die Grenzwertaussage $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ beinhaltet, sondern auch eine Darstellung des Fehlers $f(x)-p(x)$, die eine gute Fehlerabschätzung ermöglicht.

SATZ (von Taylor): *Sei $f: I \to \mathbb{R}$ n–mal differenzierbar auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und x_0 eine Stelle in I. Das n–te* **Taylor–Polynom** $p_n(x) =$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + f(x_0)$$

approximiert dann die Funktion $f(x)$ bei x_0 von n–ter Ordnung, d.h. es gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \qquad (x \in I),$$

und $p_n(x)$ ist das einzige Polynom vom Grad $\leq n$ mit dieser Eigenschaft. Ist f sogar $(n{+}1)$–mal differenzierbar auf I so gibt es zu jedem $x \in I$ eine Stelle ξ zwischen x_0 und x, so dass für das **Restglied** *(d.h. den Fehler bei Approximation von $f(x)$ durch $p_n(x)$) die* **Taylor–Formel** *gilt:*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Bis auf die letzte Formel wurde all dies schon vor dem Satz gezeigt. Um die Restgliedformel herzuleiten, betrachten wir für $x \neq x_0$ die Funktion $g(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{c}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ so bestimmt wird, dass $g(x_0) = 0$ ist. Da auch $g(x) = 0$ ist, gibt es nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle ξ von g' zwischen x_0 und x. Die Berechnung von $g'(\xi)$ mit der Summen– und Produktregel ergibt $0 = g'(\xi) = \frac{1}{(n+1)!}(c - f^{(n+1)}(\xi))$, daher ist $c = f^{(n+1)}(\xi)$, und mit Einsetzen von $t = x_0$ in die Definition von $g(t)$ folgt die behauptete Restgliedformel wegen $g(x_0) = 0$.

BEMERKUNGEN: **1)** Für $n = 1$ gibt die Taylor–Formel eine **Abschätzung des Fehlers bei linearer Approximation**:

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2\right| \leq \frac{L}{2}|x-x_0|^2,$$

wenn der Betrag der zweiten Ableitung $|f''|$ auf dem Intervall zwischen x_0 und x überall $\leq L$ ist. Diese Abschätzung ist auch für die Wirtschaftsmathematik interessant, wo oft eine Funktion durch ihre Linearisierung ersetzt wird. Entsprechend hat man für den Fehler bei Approximation mit dem zweiten Taylor–Polynom:

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2| \leq \frac{M}{6}|x-x_0|^3,$$

wenn $|f'''| \leq M$ ist. Allgemein gilt für das Restglied zum n–ten Taylor–Polynom

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{N}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1},$$

wenn für die $(n{+}1)$–te Ableitung $|f^{(n+1)}| \leq N$ ist auf dem Intervall zwischen x_0 und x.

2) Wenn das Restglied $f(x) - p_n(x)$ bei $n \to \infty$ (und festem x) gegen Null strebt, so erhält man eine Reihendarstellung für $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots\,,$$

die sog. **Taylor–Reihe** von f zum Entwicklungspunkt x_0. Aus der Restgliedformel sieht man, dass diese Reihendarstellung gültig ist, wenn das Supremum des Betrags der n–ten Ableitung $|f^{(n)}|$ auf dem Intervall zwischen x_0 und x bei gegen ∞ gehender Ableitungsordnung n langsamer anwächst als $(n{+}1)!|x{-}x_0|^{-n}$. In der Mathematik wird gezeigt, dass dies bei allen elementaren Funktionen $f(x)$, jedenfalls für x nahe genug bei x_0, gewährleistet ist. ■

BEISPIELE (***Taylor–Formel und Taylor–Reihen***):

(1) Es gilt $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\xi}x^2$ mit ξ zwischen 0 und x, also

$$|\mathrm{e}^x - 1 - x| \le \tfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x \quad \text{für } x > 0 \text{ und } \qquad |\mathrm{e}^x - 1 - x| \le \tfrac{1}{2}x^2 \quad \text{für } x < 0\,.$$

Das n–te Taylor–Polynom der Exponentialfunktion e^x zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$, und die Taylor–Formel gibt

$$|\mathrm{e}^x - 1 - x - \tfrac{1}{2!}x^2 - \ldots - \tfrac{1}{n!}x^n| \le \frac{\mathrm{e}^x}{(n{+}1)!}x^{n+1} \quad \text{für } x > 0$$

bzw.

$$|\mathrm{e}^x - 1 - x - \tfrac{1}{2!}x^2 - \ldots - \tfrac{1}{n!}x^n| \le \frac{1}{(n{+}1)!}x^{n+1} \quad \text{für } x < 0\,.$$

(2) Einige Taylor–Reihen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots && (x \in \mathbb{R},\ \textit{Exponentialreihe}),\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots && (|x| < 1,\ \textit{geometrische Reihe}),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + - \ldots && (-1 \le x \le 1,\ \textit{Logarithmusreihe}),\\
\sinh x &= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \ldots\,,\\
\cosh x &= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \ldots\,,\\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + - \ldots\,,\\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots\,.
\end{aligned}$$

Das sind nur einige wenige interessante Reihenentwicklungen aus der Mathematik. Durch Einsetzen spezieller Werte erhält man Reihendarstellungen von Zahlen, z.B.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\,,\\
\ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \ldots\,.
\end{aligned}$$

■