Klausur: Mathe f. Wiwi's II, Gruppe A, Musterlösung

A1 Richtig oder falsch? (Multiple Choice)

(a) richtig (d) falsch

(b) richtig (e) falsch

(c) richtig

A2. $f(x) = x^2 e^{-x} \quad (x > 0)$

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ 1P.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ 1P.

(b) $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 e^{-x}$ 1P.

$= x \cdot (2-x) e^{-x}$ 1P.

$\varepsilon_f(x) = \dfrac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$ 1P.

$= \dfrac{x \cdot x(2-x)e^{-x}}{x^2 e^{-x}} = 2-x$ 1P.

(c) $|\varepsilon_f(x)| < 1 \underset{(b)}{\Longleftrightarrow} |2-x| < 1$ 1P.

$\Longleftrightarrow -1 < 2-x < 1$

$\Longleftrightarrow 1 < x < 3$ 1P.

(d) Aus (b) ergibt sich wg. $x \cdot e^{-x} > 0$, dass

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ (bzw. $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$) 1P.

Also: f ist monoton steigend auf $(0,2]$, fallend auf $[2,\infty)$ 1P.

Klausur Mathe f. Wiwi's II, Gruppe A; Musterlösung

noch zu: A 2:

(e) Aus (d): $\max\{f(x) : x>0\} = f(2) = 4\cdot e^{-2}$ 1P.

$\inf\{f(x) : x>0\} = 0$ 1P.

(f) $f''(x) = \frac{d}{dx}(2x-x^2)e^{-x} = (2-2x)e^{-x} - (2x-x^2)e^{-x}$ 1P.

$= (x^2-4x+2)\cdot e^{-x}$ 1P.

(e) f ist progressiv fallend, wenn $\cancel{f'(x) \le 0 \le f''(x)}$. 1P.

$f'(x) \le 0$ und $f''(x) \le 0$.

$f'(x) \le 0 \iff x \ge 2$ nach (d) 1P.

$f''(x) \le 0 \iff x^2-4x+2 \le 0 \iff (x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2}) \le 0$

$\iff 2-\sqrt{2} \le x \le 2+\sqrt{2}$ 1P.

f ist also progressiv fallend auf $[2, 2+\sqrt{2}]$ 1P.

A3: $f(x,y) = x^2 y^3 \quad (x>0,\ y>0)$

(a) Alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung (je 1 P.) (5P)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^3 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6xy^2 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x^2y$$

(b) partielle Elastizitäten (je 1P.) (2P)

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = \frac{x}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2y^3} \cdot 2xy^3 = 2$$

$$\varepsilon_{f,y}(x,y) \qquad = 3$$

(Wurde in der Vorlesung mit allgemeinen Exponenten vorgerechnet und wird daher auch ohne Rechnung akzeptiert.)

A4 Integrale:

(a) $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx \quad (\varphi(x) = 1+x^2)$ 1P.

$= \ln(\varphi(x)) = \ln(1+x^2)$ 1P.

(b) $\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = -x \cdot e^{-x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx$ 2P.

$= -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1$ 2P.

(c) Mittelwert $= \frac{1}{6} \int_{-2}^{4} (x-1)^2\,dx$ 1P.

$= \frac{1}{18} (x-1)^3 \Big]_{-2}^{4}$ 1P.

$= 3$ 1P

Noch zu A4: Teil (d) $\quad \varepsilon_f(x) = x^3 \underset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} = x^3$ 1P.

$\Longleftrightarrow \quad (\ln(f))'(x) = x^2$ 1P.

$\Longleftrightarrow \quad \ln f(x) = \frac{1}{3}x^3 \quad (+c)$ 1P.

$\Longleftrightarrow \quad \underline{f(x) = (C\cdot)\, e^{\frac{x^3}{3}}}$ 1P.

A5: $f(x,y) = x(2x^2+3x-12) + (y^2+2y-2)e^y \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^2+3x-12 + x(4x+3) = 6(x^2+x-2)$ 1P.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (y^2+2y-2)e^y + (2y+2)e^y = (y^2+4y-5)e^y$ 1P

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(6(x^2+x-2), (y^2+4y-5)e^y\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x^2+x-2 = 0 \Longleftrightarrow x\in\{1,-2\}$ 1P

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y^2+4y-5 = 0 \Longleftrightarrow y\in\{1,-5\}$ 1P

Daraus ergeben sich 4 kritische Stellen

$$\left.\begin{array}{ll} (x_1,y_1) = (1,1) & (x_2,y_1) = (-2,1) \\ (x_1,y_2) = (1,-5) & (x_2,y_2) = (-2,-5) \end{array}\right\} \text{2P.}$$

(b) zweite partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6(2x+1)$$ 1P.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$$ 1P.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (y^2+6y-1)e^y$$ 1P.

und insgesamt ergibt sich $\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6(2x+1) & 0 \\ 0 & (y^2+6y-1)e^y \end{pmatrix}$ 1P.

(c) • $\mathrm{Hess} f(1,1) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 6e \end{pmatrix}$ 1P.

positiv definit, hier liegt ein lokales Minimum vor. 1P.

• $\mathrm{Hess} f(1,-5) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & -6e^{-5} \end{pmatrix}$ 1P.

indefinit, Sattelpunkt (jedenfalls kein Extremum). 1P.

• $\mathrm{Hess} f(-2,1) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 6e \end{pmatrix}$ 1P.

indefinit, kein Extremum 1P.

• $\mathrm{Hess} f(-2,-5) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -6e^{-5} \end{pmatrix}$ 1P.

negativ definit, es liegt ein lokales Max. vor. 1P.