Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2014
29.07.2014

Klausur zu Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler (A)

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (ausser Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Definitionen)	9 Punkte
A3 (Extremwertaufgabe)	14 Punkte
A4 (Analyse des Wachstumsverhaltens einer Funktion)	10 Punkte
A5 (Bestimmung von Funktionen gegebener Elastizität)	7 Punkte
A6 (partielle Ableitungen und Elastizitäten)	8 Punkte

Bei den Aufgaben 1,2,4, 5 (b) und 6 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. **Es empfiehlt sich also im besonderen Masse, Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden.** Die Klausur gilt mit 23 (von 58 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Die Umkehrfunktion einer streng konvexen Funktion ist ebenfalls streng konvex.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(b) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(c) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist f surjektiv.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(d) Jede isoelastische Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ ist streng monoton.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(e) Für die Elastizität zweier differenzierbarer Funktionen $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ gilt die Quotientenregel $\varepsilon_{\frac{f}{g}}(x) = \dfrac{\varepsilon_f(x)}{\varepsilon_g(x)}$.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(1+2+1+1+2+2 P.)** Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ergänzen Sie die folgenden Definitionen:

(a) f heisst *stetig* in $x_0 \in I$, wenn gilt

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. 1P.

(b) f heisst *differenzierbar* in $x_0 \in I$, falls der Grenzwert

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0)) \left(\text{oder} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) =: f'(x_0)$ 1P.

existiert. In diesem Fall heisst $f'(x_0)$

die Ableitung von f in x_0 . 1P.

(c) f heisst *ungerade*, falls

$f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in I$ 1P.

(Hierbei wird vorausgesetzt, dass I symmetrisch zum Nullpunkt ist.)

(d) f heisst *monoton steigend*, wenn

$f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in I$ mit $x < y$. 1P.

(e) f heisst *streng konvex*, falls für alle $x, y \in I$ und für alle $\lambda \in (0,1)$ gilt 1P.

$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. 1P.

(f) f heisst *progressiv fallend*, wenn f monoton fallend 1P

und konkav ist. 1P.

3. **(1+3+3+3+4 P.)** Gegeben sei die Funktion

$$f : [-10, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) := (x^2 - 2x - 7)e^{-x}.$$

(a) Bestimmen Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$ $= 0$ 1P.

(b) Berechnen Sie $f'(x)$. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, dass die Nullstellen von f' ablesbar sind.

$$f'(x) = (2x-2)e^{-x} - (x^2 - 2x - 7)e^{-x} \qquad 1P$$

$$= -(x^2 - 4x - 5)e^{-x} \qquad 1P.$$

$$= -(x-5)(x+1)e^{-x} \qquad 1P.$$

(c) Geben Sie das grösste Intervall an, auf dem f streng monoton steigt.

$$f'(x) > 0 \iff (x-5)(x+1) < 0 \qquad 1P$$

$$\iff x - 5 < 0 < x + 1$$

$$\iff -1 < x < 5 \qquad 1P.$$

$\Rightarrow$ f ist streng monoton steigend auf $[-1, 5]$ * 1P.

(d) Bestimmen Sie *alle* lokalen Extremstellen und Extrema von f sowie deren Typ. (Die Funktionswerte sollen angegeben, die Potenzen von e dabei nicht ausgerechnet werden.)

lok. Maximalstelle: $x_0 = -10$ mit $f(x_0) = 113 \cdot e^{10}$ (1P.)

" Minimal- " : $x_1 = -1$ " $f(x_1) = -4e$ (1P.)

" Maximal- " : $x_2 = 5$ " $f(x_2) = 8e^{-5}$ (1P.)

(e) Bestimmen Sie $\sup\{f(x) : x \geq -10\}$ und $\inf\{f(x) : x \geq -10\}$. Entscheiden Sie, ob es sich hierbei um ein Maximum bzw. ein Minimum handelt, und geben Sie gegebenenfalls die Extremalstellen an.

$$\sup_x f(x) = \max_x f(x) = 113\, e^{10} \; (= f(-10)) \qquad (2P)$$

$$\inf_x f(x) = \min_x f(x) = f(-1) = -4e \qquad (2P.)$$

* wird hier das offene (oder halboffene) Intervall angegeben, gibt es keinen Punktabzug

4. (3+3+4 P.) Für $x \geq 0$ sei $f(x) = e^{3x - \frac{x^2}{2}}$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit wie mglich.

$$f'(x) = e^{3x - x^2/2}(3-x)$$ 1P.

$$f''(x) = e^{3x - x^2/2} \cdot (3-x)^2 + e^{3x - \frac{x^2}{2}} \cdot (-1)$$ 1P.

$$= e^{3x - x^2/2}\left((x-3)^2 - 1\right)$$

ausmultiplizieren ist auch ok.

$$= e^{3x - \frac{x^2}{2}}(x-2)(x-4)$$ 1P.

(b) Geben Sie die Nullstellen von f' und f'' an.

$f'(x) = 0 \iff x = 3$ 1P.

$f''(x) = 0 \iff x = 2$ 1P.

oder $x = 4$ 1P.

(c) Bestimmen Sie das jeweils grösste Teilintervall von $[0, \infty)$, auf dem f

(i) progressiv fallend, $[3, 4]$ 1P.

(ii) degressiv wachsend, $[2, 3]$ 1P.

(iii) degressiv fallend bzw. $[4, \infty)$ 1P.

(iv) progressiv wachsend ist. $[0, 2]$ 1P.

((Halb-) offene Intervalle: kein Punktabzug)

5. **(5+2 P.)** (a) Bestimmen Sie jeweils eine Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, so dass für die Elastizität dieser Funktion $\varepsilon_f(x) = h(x)$ gilt, wobei

(i) $h(x) = \frac{1}{x}$,

Man weiss (oder leitet notfalls kurz her), dass

$f(x) = \exp\left(\int \frac{h(x)}{x}\, dx\right)$ 1P.

Wg. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$ 1P.

folgt $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ (oder: $C \cdot e^{-\frac{1}{x}}$). 1P.

(ii) $h(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

$\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$, 1P.

also $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 1P.

(b) Gesucht ist eine Funktion $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$, für die $\varepsilon_{f,x}(x, y) = \frac{3}{2}$ und $\varepsilon_{f,y}(x, y) = 4$ ist.

$f(x, y) = x^{\frac{3}{2}} \cdot y^4$ (oder Vielfache) 2P.

6. **(2+2+4 P.)** Gegeben sei die Funktion

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) := x^y.$$

$= \exp(y \cdot \ln(x))$

Berechnen Sie

(a) die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\, x^{y-1}$$ 1P.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)\, x^y$$ 1P.

(b) die partiellen Elastizitäten

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = \frac{x}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x \cdot y \cdot x^{y-1}}{x^y} = y$$ 1P.

$$\varepsilon_{f,y}(x,y) = \frac{y}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y \cdot \frac{\ln(x) \cdot x^y}{x^y} = y \cdot \ln(x)$$ 1P.

(c) und alle zweiten partiellen Ableitungen von f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y(y-1)\, x^{y-2}$$ 1P.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y \cdot x^{y-1}\right) = x^{y-1} + y \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} x^{y-1}}_{= x^{y-1} \cdot \ln(x)}$$

$$= (1 + y \cdot \ln(x))\, x^{y-1}$$ 2P.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (\ln(x))^2 x^y$$ 1P.