Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
APL. PROF. DR. AXEL
GRÜNROCK

SoSe 2021
30.09.2021

2. Klausur zu Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Bitte die nächsten beiden Zeilen unbedingt ausfüllen!

Name, Vorname: Lösung und

Matrikelnummer: Wertung

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	8 Punkte
A2 (Elastizität Wachstums- und Krümmungsverhalten einer Funktion)	10 Punkte
A3 (Grenzwerte)	6 Punkte
A4 (Symmetrisierungen)	5 Punkte
A5 (Integrale)	9 Punkte
A6 (Gradient, Richtungsableitung und zugehörige Elastizitäten)	8 Punkte
A7 (Extremwertaufgabe in zwei Variablen)	14 Punkte

In Aufgabe 1 sollen Sie entscheiden, ob die vorgelegten mathematischen Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie dies bitte in den dafür vorgesehenen Kreisen auf Seite 3 an. Bei den Aufgaben 2 bis 6 werden lediglich die Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, **Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden. Tragen Sie Ihre Ergebnisse zu diesen Aufgaben bitte auf S. 2 ein. Diese Einträge sind maßgeblich für die Korrektur!** Bei Aufgabe 7 wird auch der Rechenweg bewertet. Die Klausur gilt mit 25 (von 60 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2-6	7	Σ	Note
Punkte/Note					

Lös. Aufg. 2 (a) $f'(x) = \frac{x-1}{2x^{3/2}}$ $\qquad \varepsilon_f(x) = \frac{x-1}{2(x+1)}$ / **2P.**

(b) $x_{min} = 1$ $\qquad f(x_{min}) = 2$ / **2P.**

(c) $I = (0, \infty)$ / **2P.**

(d) $f''(x) = \frac{3}{4x^{5/2}} - \frac{1}{4x^{3/2}}$ $\qquad$ (e) $J = (0, 3)$ /**2+2P.**

Lös. Aufg. 3 (a) $g_1 = 2$ $\qquad$ (b) $g_2 = 1$ / **2P.**

(c) $g_3 = 1$ $\qquad$ (d) $g_4 = \frac{1}{2}$ / **2P.**

(e) $g_5 = 1$ $\qquad$ (f) $g_6 = 0$ / **2P.**

Lös. Aufg. 4 (a) $P_+f(x) = x^4 + 3x^2 + 4$ $\qquad P_-f(x) = 2x^3$ / **2P.**

(b) $P_+f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $= \cosh(x)$

$P_-f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $= \sinh(x)$ / **3P.**

Lös. Aufg. 5 (a) $M = 2/3$ / **3P.**

(b) $f(x) = C \cdot e^{2\sqrt{x}}$ mit einem $C > 0$ / **3P.**

(c) $I = 1/4$ / **3P.**

Lös. Aufg. 6 (a) $\nabla f(x,y) = (2x e^{y^2}, 2x^2 y e^{y^2})$ / **2P.**

(b) $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0, y_0) = 8e$ / **2P.**

(c) $\vec{\varepsilon}_f(x,y) = (2, 2y^2)$ / **2P.**

(d) $\varepsilon_{f,\xi}(x_0, y_0) = \frac{14}{5}$ / **2P.**

$\Sigma =$

1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen stets richtig, und welche im allgemeinen falsch sind. (Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!)

Im Folgenden seien stets $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ differenzierbar mit Elastizitäten ε_f bzw. ε_g .

(a) Ist $\varepsilon_f(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$, so ist f injektiv.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(b) Ist $\varepsilon_f(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$, so ist f surjektiv.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(c) Ist $\varepsilon_f(x) > \varepsilon_g(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$, so ist $f(x) > g(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(d) Ist $\varepsilon_f(x) = \varepsilon_g(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$, so gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass $f(x) = cg(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+2+2+2+2 P.)** Für $x \in (0, \infty)$ sei $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und die Elastizität $\varepsilon_f(x)$. (Vereinfachen Sie Ihre Ergebisse.)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad 1P. \quad = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x^{3/2}}(x-1)$$

$$\varepsilon_f(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x^{3/2}} \frac{x(x-1)}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{x-1}{2(x+1)} \quad 1P.$$

(b) Besitzt f ein globales Minimum? Bestimmen Sie ggf. dessen Stelle x_{min} und Wert $f(x_{min})$.

$$f'(x) \gtreqless 0 \iff x-1 \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 1$$

$\Rightarrow$ f ist streng monoton $\begin{matrix} \text{fallend} \\ \text{steigend} \end{matrix}$ auf $\begin{matrix} (0,1] \\ [1,\infty) \end{matrix}$

$\Rightarrow$ globales Min. bei $x_{min} = 1$ 1P. und $f(x_{min}) = 2$ 1P.

(c) Bestimmen Sie das größte Teilintervall $I \subset (0, \infty)$, auf dem f unelastisch ist.

$\forall x > 0$ haben wir $|\varepsilon_f(x)| = \frac{|x-1|}{2(x+1)} \leq \frac{x+1}{2(x+1)} \leq \frac{1}{2}$.

$\leadsto I = (0, \infty)$

(d) Berechnen Sie $f''(x)$, und bestimmen Sie ...

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} \quad 2P. \quad = \frac{3}{4x^{5/2}} - \frac{1}{4x^{3/2}}$$

(e) das größte offene Teilintervall $J \subset (0, \infty)$, auf dem f streng konvex ist.

$$\frac{3}{4x^{5/2}} - \frac{1}{4x^{3/2}} > 0 \iff 3x^{-5/2} > x^{-3/2} \iff 3 > x$$

$\Rightarrow J = (0, 3)$ 2P.

3. **(1+1+1+1+1+1 P.)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $g_1 := \lim_{x\to 0} 2^{(2^x)}$ $= 2^{(2^0)} = 2^1 = 2$

(b) $g_2 := \lim_{x\to 0} (2^2)^x$ $= 4^0 = 1$

(c) $g_3 := \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ $= \exp'(0) = e^0 = 1$

(d) $g_4 := \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

$$\underset{(*)}{=} \frac{d}{dx}\sqrt{1+x}\,\Big|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

(e) $g_5 := \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = 1$$

(f) $g_6 := \lim_{x\to\infty} \frac{3e^x}{1+e^{2x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{e^{-x}+e^x} = 0$$

(*) alternativ kann man mit $\sqrt{x+1}+1$ erweitern.

4. **(2+2+1 P.)** Bestimmen Sie die Symmetrisierungen $P_\pm f$ für die Funktionen

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4$ und

$P_+ f(x) = x^4 + 3x^2 + 4$ 1P.

$P_- f(x) = 2x^3$ 1P.

(b) $f(x) = e^x$.

Drücken Sie Ihre Ergebnisse zu (b) auch mit Hilfe der Hyperbelfunktionen aus.

$P_+ f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$ 1,5 P.

$P_- f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$ 1,5 P.

5. **(3+3+3 P.)** Berechnen Sie

(a) den Mittelwert M der Funktion $f(x) = x(x-2)^2$ auf dem Intervall $[0, 2]$,

$$f(x) = x(x^2 - 4x + 4) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

$$\leadsto \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x^3 - 4x^2 + 4x\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \Big|_0^2$$

$$= 4 - \frac{32}{3} + 8 = \frac{36-32}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\leadsto M = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

(b) alle Funktionen $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ mit der Elastizität $\varepsilon_f(x) = \sqrt{x}$,

$$\sqrt{x} = \varepsilon_f(x) = \frac{x f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln \circ f)'(x)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = \ln(f(x)) + c \Rightarrow f(x) = C \cdot e^{2\sqrt{x}}$$

(mit einem $C > 0$)

↖ Wenn man C oder diese Bem. vergisst, gibt's 1P. Abzug.

(c) das uneigentliche Integral $I := \int_0^\infty x^3 e^{-x^4}\,dx$.

$$I = \frac{1}{4} \cdot \int_0^\infty 4x^3 \cdot e^{-x^4}\,dx \qquad \varphi(x) = x^4,\ \varphi'(x) = 4x^3$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\infty \varphi'(x) \cdot e^{-\varphi(x)}\,dx = \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \cdot e^{-\varphi} \Big|_0^\infty = \frac{1}{4}$$

6. **(2+2+2+2 P.)** Gegeben sei die Funktion

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty), \quad (x,y) \mapsto f(x,y) := x^2 e^{(y^2)}.$$

Berechnen Sie

(a) den Gradienten $\nabla f(x,y)$,

(b) die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0,y_0)$ nach $\xi := \frac{1}{5}(4,3)$ in $(x_0,y_0) := (2,1)$,

(c) den Elastizitätsgradienten $\vec{\varepsilon}_f(x,y)$,

(d) die Richtungselastizität $\varepsilon_{f,\xi}(x_0,y_0)$ für ξ und (x_0,y_0) wie in (b),

(a) $\nabla f(x,y) = (2x e^{y^2}, 2x^2 y e^{y^2})$ 2P.

(b) $\nabla f(x_0,y_0) = \nabla f(2,1) = (4e, 8e)$

$\langle \nabla f(x_0,y_0), \xi \rangle = \frac{1}{5} \langle \binom{4e}{8e}, \binom{4}{3} \rangle = \frac{1}{5}(16e + 24e) = 8e$ 2P.

(c) $\varepsilon_{f,x} = \dfrac{x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)} = \dfrac{2x^2 \cdot e^{y^2}}{x^2 \cdot e^{y^2}} = 2,$

$\varepsilon_{f,y} = \dfrac{y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f(x,y)} = \dfrac{2x^2 y^2 e^{y^2}}{x^2 e^{y^2}} = 2y^2$

$\Rightarrow \vec{\varepsilon}_f(x,y) = (2, 2y^2)$ 2P.

(d) $\vec{\varepsilon}_f(x_0,y_0) = \vec{\varepsilon}_f(2,1) = (2,2)$

$\varepsilon_{f,\xi}(x_0,y_0) = \langle \vec{\varepsilon}_f(x_0,y_0), \xi \rangle = \frac{1}{6} \langle \binom{2}{2}, \binom{4}{3} \rangle$ 2P.

$= \frac{1}{5} \cdot (8+6) = \frac{14}{5}.$

7. **(5+3+5+1 P.)** Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x,y) = x^3 - 2xy + y^3.$$

(a) P besitzt zwei kritische Stellen. Bestimmen Sie diese.

(b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $\mathrm{Hess}P(x,y)$ und deren Determinante.

(c) Untersuchen Sie $\mathrm{Hess}P(x,y)$ in den kritischen Stellen von P auf Definitheit. Besitzt P lokale Extrema? Wenn ja, welchen Typs?

(d) Besitzt P ein globales Extremum? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\nabla P(x,y) = (3x^2 - 2y, -2x + 3y^2)$ 1P.

Zur Ermittlung der kritischen Stellen ist das System

$$(GlS) \quad \begin{cases} 3x^2 = 2y \\ 3y^2 = 2x \end{cases}$$ zu lösen. 1P.

Ablesbar wird: $(x,y) = (0,0)$ ist eine Lösung, $\longrightarrow$ 1P

($x, y \geq 0$ $\forall$ Lösungen (x,y), $x = 0 < y$ oder $y = 0 < x$ liefert keine Lösung.)

Unter der Voraussetzung $x > 0$ und $y > 0$ gilt

$$(GlS) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 \\ x = \frac{3}{2}y^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 \\ x = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}x^2\right)^2 = \frac{3^3}{2^3}\cdot x^4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 \\ x^3 = \frac{2^3}{3^3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Also ist $(x,y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ebenfalls eine kritische Stelle. 2P.

Lösung Aufg. 7 – Fortsetzung

(b)

$$\text{Hess}\, P(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \qquad 2P.$$

$$\det \text{Hess}\, P(x,y) = 36xy - 4 = 4(9xy-1) \qquad 1P$$

beides ok.

1P.

(c) $\det \text{Hess}\, P(0,0) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Hess}\, P(0,0)$ ist indefinit

$\Rightarrow$ in $(0,0)$ liegt kein Extremum / ein Sattelpunkt vor. 1P.

$\det \text{Hess}\, P(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = 4(9\cdot\frac{4}{9} - 1) = 4\cdot 3 = 12 > 0$

1P.

$\Rightarrow \text{Hess}\, P(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ ist definit,

und zwar positiv, weil (z.B.) auch $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = 4 > 0$ ist 1P.

$\Rightarrow$ in $(x,y) = (\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ besitzt P ein lokales Minimum. 1P.

(d) Nein, weil

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x,x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2(x^3 - x^2) = \pm\infty. \qquad 1P.$$