1.7 Integration

Wir fassen die Integration auf als Umkehrung der Ableitung.

Def. (Stammfunktion): Gegeben sei eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann nennen wir F eine Stammfunktion von f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Bem.: (1) Eine Funktion, die eine Stammfunktion besitzt, nennen wir integrierbar. Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar. Es gibt nicht-integrierbare Funktionen, z. B.

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{" } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(2) Ist F eine Stammfunktion von f und $G(x) = F(x) + C$ mit einem festen $C \in \mathbb{R}$, so ist G ebenfalls eine Stammfunktion von f. Die Stammfunktion ist also nicht eindeutig bestimmt.

(3) Sind F und G zwei Stammfunktionen derselben Funktion f, so gilt

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0 \Rightarrow F - G = \text{konst.}$$

Das bedeutet: Zwei Stammfunktionen einer Funktion können sich nur um eine additive Konstante unterscheiden.

(4) Die Gesamtheit aller Stammfunktionen $F + C$ zu einer gegebenen Funktion f heißt das unbestimmte Integral von f und wird mit

$$\int f(x)\,dx$$

bezeichnet.

Bsp.: (1) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ bel., $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Longrightarrow \int f(x)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(2) $[a,b] \subset (0,\infty)$ oder $[a,b] \subset (-\infty,0)$, $f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

$$\Longrightarrow \int f(x)\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

(3) $[a,b] \subset (0,\infty)$, $f(x) = x^a$, mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\Longrightarrow \int f(x)\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

(4) $[a,b] \subset (0,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow \int f(x)\,dx = \ln(x)$;

$[a,b] \subset (-\infty,0)$, $f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow \int f(x)\,dx = \ln(-x)$,

denn: $\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ (Kettenregel).

Dies wird häufig zusammengefaßt zu

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|), \qquad x \neq 0 .$$

(5) $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \Rightarrow \int f(x)\,dx = e^x$.

Soweit eine kurze Liste von Grundintegralen, die man tatsächlich auswendig wissen sollte.

Für die Anwendungen der Integralrechnung ist der folgende Begriff von zentraler Bedeutung:

Def. (bestimmtes Integral): Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit Stammfunktion F. Dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

das <u>bestimmte Integral</u> von f über $[a,b]$.

<u>Bem.</u>: (1) Sind a, b und f gegeben, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl.

(2) Sind F und G Stammfunktionen von f, so gilt $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$, da sich F und G nur um eine Konstante unterscheiden. Daher ist das bestimmte Integral wohldefiniert.

Geometrische Interpretation:

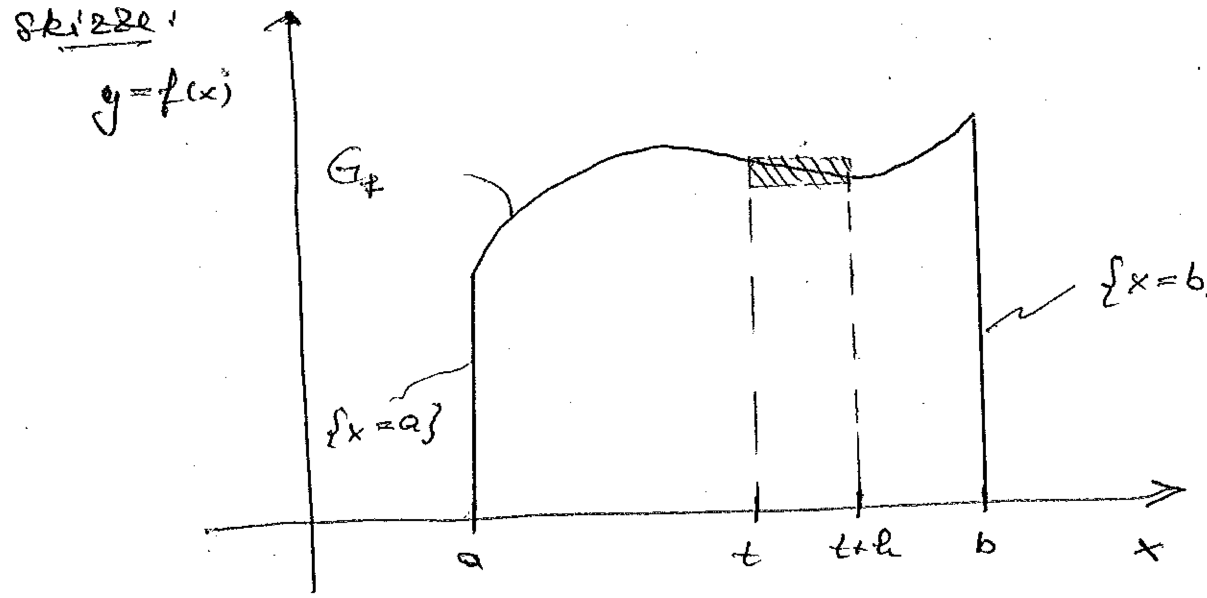
(1) Es sei $f : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \text{Flächeninhalt zwischen}$$

$G_f = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$, der x-Achse und den

Geraden $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = b\}$.

Skizze:



Begründung: Wir definieren eine Funktion F durch

$F(t) =$ Flächeninhalt zwischen G_f, x-Achse, $\{x=a\}$ und

$\{x = t\}$, dabei $a \le t \le b$.

Dann ist für h mit $t+h \in [a,b]$

$$F(t+h) - F(t) = f(t)\cdot h + R(t,h)$$

wobei wir den Rest $R(t,h)$ abschätzen können durch

die Rechteckfläche

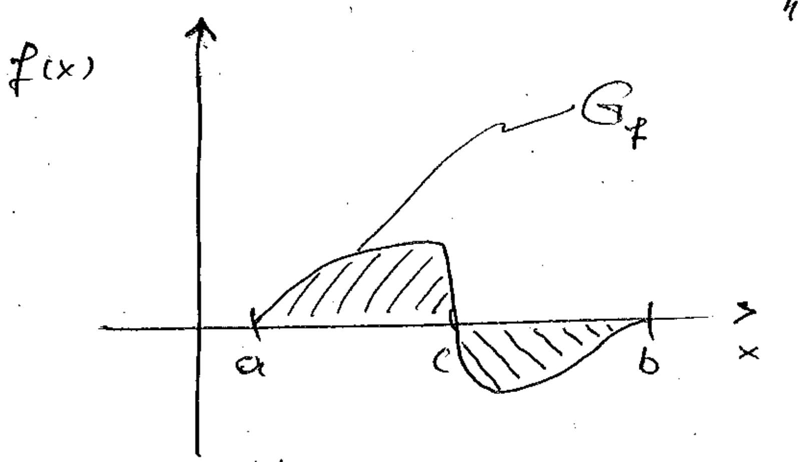
$$|R(t,h)| \le h \cdot \max\{|f(t+h_1) - f(t+h_2)|, |h_{1,2}| \le |h|\},$$

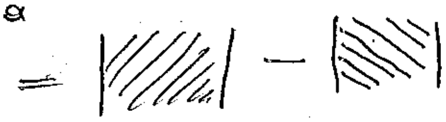
Da f stetig ist gilt $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} R(t,h) = 0$ und damit

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(F(t+h)-F(t)\right) = f(t), \text{ d.h. } F'(t) = f(t).$$

(2.) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig (also insbes. $f(x)<0$ möglich), so wird der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse als negativ aufgefaßt. Ist also $f(a)=f(c)=f(b)=0$ und $f(x)>0$ für $x\in(a,c)$ sowie $f(x)<0$ für $x\in(c,b)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Fläche zwischen } G_f \text{ und } [a,c]$$
$$- \text{ Fläche zwischen } G_f \text{ und } [c,b]$$



"$\int_a^b f(x)\,dx$ =  "

(3) $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ = Flächeninhalt / Intervalllänge

= Mittelwert von f auf $[a,b]$.

Typische Aufgabenstellungen in diesem Zusammenhang sind etwa folgende (siehe auch A 2 vom Ü-Blatt 7):

· Gegeben sei eine Funktion auf einem Intervall $[a,b]$,

z.B.: $f : [-1,2] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto f(x) = x^2 + e^x$.

Zu berechnen ist:

(a) der Flächeninhalt zwischen G_f, x-Achse und den Geraden $\{x=-1\}$, $\{x=2\}$,

(b) der Mittelwert von f auf $[-1,2]$.

Lösung: Stammfunktion: $F(x) = \frac{x^3}{3} + e^x$.

(a) $$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = F(2) - F(-1) = \frac{8}{3} + e^2 \underbrace{- \frac{(-1)^3}{3}}_{= + \frac{1}{3}} - e^{-1}$$

$$= 3 + e^2 - e^{-1}.$$

(b) Hierfür ist das Ergebnis aus (a) noch durch die Intervalllänge zu dividieren, also:

$$\text{Mittelwert} = \frac{1}{2-(-1)} \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 1 + \frac{e^2}{3} - \frac{1}{3e}.$$

Vom (rechen-) technischen Standpunkt aus besteht die Hauptaufgabe der Integralrechnung darin, zu einer gegebenen Funktion f eine Stammfunktion F zu finden. Dies gelingt zumeist dadurch, daß man ein gegebenes Integral durch Anwendung gewisser Integrationsregeln auf die o.g. Grundintegrale zurückführt. Diese Integrationsregeln ergeben sich durch die Umkehrung der Ableitungsregeln:

(1) Linearität des Integrals: Für integrierbare Funktionen f und g sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx,$$

wobei $\int$ auch durch $\int_a^b$ ersetzt werden kann.

Anwendung: Integration von Polynomen

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow \int P(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

(2) Für bestimmte Integrale gilt noch eine weitere Additionsregel, die sich auf die Integrationsintervalle bezieht. Man vereinbart $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

und erhält allgemein

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

sofern nur f auf $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$ integrierbar ist. (Hierbei ist also auch $c<a$ oder $c>b$ möglich.)

(3) "$\frac{1}{\alpha}$-Regel" – die einfachste Form der Umkehrung der Kettenregel: Ist $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ und $\int f(x)\,dx = F(x)$, so gilt $\int g(x)\,dx = \frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha x + \beta)$ (vorausgesetzt: $\alpha \neq 0$!)

Begründung: $\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha}F'(\alpha x + \beta) \cdot \frac{d}{dx}(\alpha x + \beta)$

(nach der Kettenregel) $= f(\alpha x + \beta) = g(x)$.

Anwendungen:

- $\int \frac{1}{x-7}\,dx = \ln(|x-7|) \quad (\alpha=1,\ \beta=-7)$;

- $\int \sinh(x)\,dx = \int \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) = \cosh(x)$;
  $(\alpha=-1,\ \beta=0)$

- $\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$, insbes.:

- $\int a^{x}\,dx = \int \exp(x\cdot\ln(a))\,dx \overset{\alpha=\ln(a)}{=} \frac{1}{\ln(a)}\cdot\exp(x\ln(a))$

$$= \frac{a^{x}}{\ln(a)}$$

(4) <u>Partielle Integration</u> (Umkehrung der Produktregel):

Aus $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ folgt durch Integration:

$$f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Umstellen ergibt die Form, in der man diese "Regel der partiellen Integration" zumeist anwendet:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

für das unbestimmte Integral. Version für das bestimmte Integral:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx,$$

wobei $f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Anwendungen:

- $\int x e^x dx = ?$

Bekannt ist $\int e^x dx = e^x$ (da $(e^x)' = e^x$), um durch partielle Integration dorthin zu gelangen, wählt man

$$f'(x) = e^x \text{ und } g(x) = x .$$

Dann erhält man

$$\int x \cdot e^x dx = \underset{g(x)}{x} \cdot \underset{f(x)}{e^x} - \int \underset{g'(x)}{1} \cdot e^x dx = (x-1)e^x$$

Das Argument kann man wiederholen

- $\int x^2 e^x dx = \int \underset{g}{x} \cdot \underset{f'}{(x \cdot e^x)} dx = x(x-1) \cdot e^x - \int (x-1)e^x dx$

$$= x(x-1)e^x - (x-1)e^x + e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

Sicherlich etwas mühsam, aber prinzipiell lösbar sind auf diesem Wege alle Integrale des Typs

- $\int x^n e^x dx$, $\int x^n e^{-x} dx$, $\int x^n \sinh(x) dx$, $\int x^n \cosh(x) dx$

mit einer natürlichen Zahl n.

- $\int \ln(x) dx = \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\ln(x)} dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$

$$= x \cdot \ln(x) - x = x(\ln(x) - 1).$$

20.6.

(5) Umformungen des Integranden

(keine Integrationsregel im eigentlichen Sinn, aber nützlich)

Insbesondere bei rationalen Funktionen anzuwenden, z. B.:

- $\int \frac{x-3}{(x-7)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-7}\,dx + \int \frac{4}{(x-7)^2}\,dx$

$$= \ln(|x-7|) - \frac{4}{x-7}$$

und, etwas komplizierter durch sog. "Partialbruchzerlegung". Auch dazu ein Bsp.:

$$\int \frac{1}{x-5} \cdot \frac{1}{x-6}\,dx = ?$$

Dazu schreiben wir $\frac{1}{x-5} \cdot \frac{1}{x-6} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-6}$ (Ansatz)

- $\cdot (x-5)$ und $x = 5$ setzen: $A = -1$
- $\cdot (x-6)$ und $x = 6$ setzen: $B = 1$

Also:

$$\int \frac{dx}{(x-5)(x-6)} = -\int \frac{dx}{x-5} + \int \frac{dx}{x-6} = \ln\left(\left|\frac{x-6}{x-5}\right|\right)$$

(6) Substitutionsregel (Umkehrung der Kettenregel):

Aus der Kettenregel

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

erhalten wir (mit $F' = f$) durch Integration

$$\int f(y)\,dy \Big|_{y=\varphi(x)} := F(\varphi(x)) = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx$$

Für das bestimmte Integral ergibt hieraus

$$\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy .$$

In vielen Fällen ist ein Integral hierdurch leicht zu berechnen, wenn man die Struktur $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ des Integranden erkennt:

Bsp. (1) $f(x) = \frac{1}{x}$, φ positiv

$$\Longrightarrow \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \ln(\varphi(x))$$

$\varphi(x) = 1+x^2$
$\varphi'(x) = 2x$

Anwendungen: • $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$= \ln(\sqrt{1+x^2})$

• Ist $\varphi > 0$ eine differenzierbare Funktion mit der Elastizität

$$\varepsilon_\varphi(x) = \frac{x\cdot\varphi'(x)}{\varphi(x)} = h(x) \Rightarrow \ln(\varphi(x)) = \int\frac{h(x)}{x}\,dx$$

(2) $f(x) = x^n$, φ beliebig

$$\leadsto \int \varphi(x)^n\cdot\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\varphi(x)^{n+1}$$

Anwendung: $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x)^2$

Ist die Struktur $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ nicht gleich erkennbar, versucht man, eine geeignete innere Funktion φ zu erraten. Auch dazu ein

Bsp: $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = ?$

Wir versuchen $\varphi(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\varphi(x)}$.

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2\varphi(x)\cdot\varphi'(x)}{1+\varphi(x)}\,dx = \int \frac{2y}{1+y}\,dy \Big|_{y=\sqrt{x}}$$

$$= 2\int \frac{1+y-1}{1+y}\,dy \Big|_{y=\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\right).$$