1.3 Die Ableitung: Definition und Rechenregeln

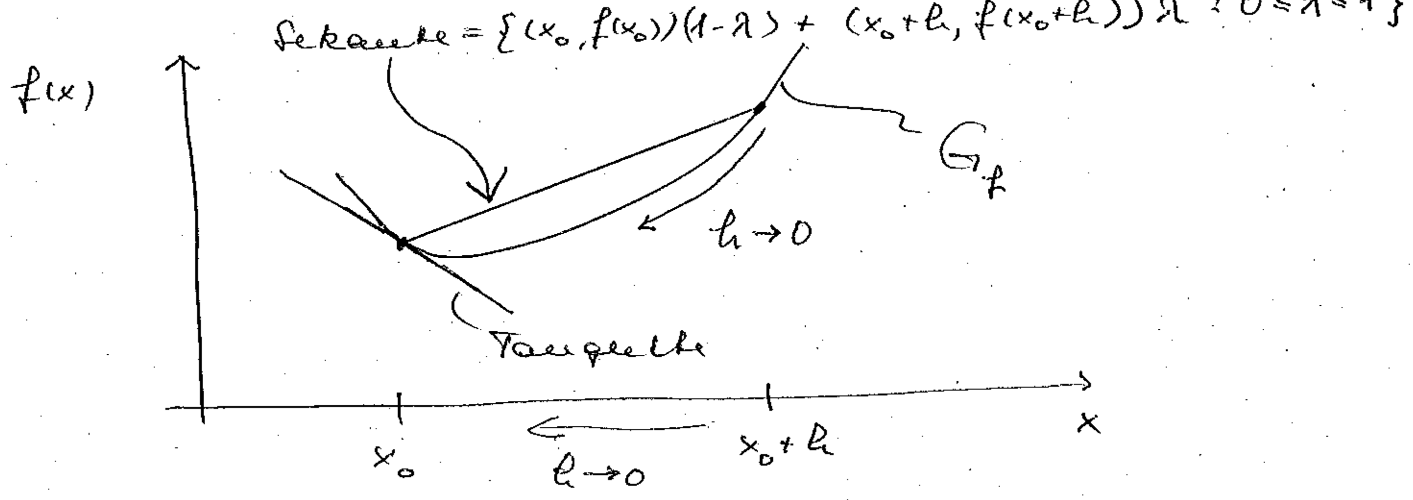
Def.: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$. Dann heißt f <u>differenzierbar in x_0</u>, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(x_0+h) - f(x_0) \right) =: f'(x_0)$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ die <u>Ableitung von f in x_0</u>.

Weitere Bez.: $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x=x_0}$.

geometrische Interpretation: Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(x_0, f(x_0))$



Für $h \to 0$ geht die Schar der Sekanten über in die Tangente und damit die Sekantensteigung in die Steigung der Tangente.

Diese Interpretation läßt vermuten:

Differenzierbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit.

Begründung: Wenn $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x_0+h)-f(x_0))$ existiert, ist $\frac{1}{h}(f(x_0+h)-f(x_0))$ insbesondere beschränkt, es gibt also ein $C>0$, so dass $|f(x_0+h)-f(x_0)| \le C\cdot|h|$. Für $h\to 0$ ergibt sich die Stetigkeit von f in x_0.

(Die Umkehrung gilt nicht: $f(x)=|x|$ ist in $x_0=0$ stetig, aber nicht differenzierbar.)

Def. Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall. $f: I\to\mathbb{R}$ heißt differenzierbar in I, wenn f in jedem $x\in I$ differenzierbar ist. Die Funktion

$$f': I\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f'(x)$$

wird als die <u>Ableitung</u> von f bezeichnet.

Ökonomische Terminologie: Grenz- bzw. Marginalfunktion.

Zu unterscheiden ist also zwischen

$$f': I\to\mathbb{R} \quad >\!\!-\!\!\!-\!\!< \quad f'(x_0)\in\mathbb{R}$$

Ableitung von f, eine <u>Funktion</u>

Ableitung von f in x_0, eine <u>reelle Zahl</u>

Ist f' auch noch diff'bar, können wir die sogenannte

$$2.\ \text{Ableitung}: \quad f'' := (f')'$$

bilden, allgemeiner die n-te Ableitung $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, sofern all diese Grenzwerte existieren.

Bsp.: (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = ax + b$ (affin-lineare Fkt.)

Hierfür ist $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(ax + ah + b - ax - b)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot a \cdot h = a.$$

Dies gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$, woraus sich $f''(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{a-a}{h} = 0$ ergibt.

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$

$$\rightsquigarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((x+h)^2 - x^2) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(2xh + h^2) = 2x$$

$\rightsquigarrow$ (nach Bsp. (1)) $f''(x) = 2$

(3) Allgemeiner: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Hierfür haben wir nach dem binomischen Lehrsatz:

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot h^k - x^n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot h^k$$

$$\rightsquigarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot h^{k-1}$$

$$= n \cdot x^{n-1}$$

Im allgemeinen ist es zu umständlich, Ableitungen mit Hilfe der Definition auszurechnen. Aus diesem Grund leitet man eine Reihe von Rechenregeln her:

1. <u>Linearität</u> der Ableitung: Ist $f(x) = \lambda g(x) + \mu \cdot h(x)$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, g und h diffbar), so erhält man mit den Rechenregeln für Grenzwerte

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\lambda g(x+h) + \mu h(x+h) - \lambda g(x) - \mu h(x)\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \{\lambda(g(x+h) - g(x)) + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \mu(h(x+h) - h(x))$$

$$= \lambda \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(g(x+h) - g(x)) + \mu \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(h(x+h) - h(x))$$

$$= \lambda g'(x) + \mu h'(x).$$

Also: $(\lambda g + \mu h)' = \lambda g' + \mu h'$ bzw. $\frac{d}{dx}(\lambda g + \mu h)(x) = \lambda \frac{dg}{dx}(x) + \mu \frac{dh}{dx}(x)$

Bsp. (1) Polynome: $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$

(folgt aus Bsp. (3) oben und der Linearität.)

(2) Potenzreihen in ihrem Konvergenzbereich:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(folgt aus (1) durch Grenzübergang; um das zu rechtfertigen, müßte man etwas mehr über Reihenkonvergenz lernen)

Anwendung: $P(x) = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\Rightarrow P'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \underset{(k=n-1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

Also: $\exp'(x) = \exp(x)$.

2. <u>Produktregel</u>: $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x), \text{ denn}$$

$$f(x+h) - f(x) = g(x+h)h(x+h) - g(x) \cdot h(x) \; \{-g(x)h(x+h) + g(x)h(x+h)\}$$

$$= (g(x+h) - g(x))\, h(x+h) + (h(x+h) - h(x)) \cdot g(x)$$

Jetzt durch h dividieren, dann $h \to 0$.

Bsp.: $f(x) = x \cdot \exp(x) \Rightarrow f'(x) = \exp(x) + x \cdot \exp'(x) = (1+x)\exp(x)$

3. <u>Quotientenregel</u>: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{h(x)^2} \{ g'(x) h(x) - g(x) \cdot h'(x) \},$$

insbesondere nützlich für die Ableitung rationaler Fkten,

z.B. $\quad f(x) = \dfrac{x+1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2} (1 + x^2 - (x+1)\, 2x)$

$$= \frac{1 - 2x - x^2}{(1+x^2)^2}$$

4. <u>Kettenregel</u> (für die Verknüpfung zweier Funktionen):

$$f(x) = h(g(x)) \Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

insbes. $f(x) = h(c \cdot x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot h'(cx)$. $(c \in \mathbb{R})$

Bsp. ① $\quad f(x) = e^{cx} \Rightarrow f'(x) = c \cdot e^{cx}$ und

daher: $f(x) = a^x = \exp(\ln(a) \cdot x) \Rightarrow f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$

② $f(x) = \exp(\exp(\exp(x))) = f_3 \circ f_2 \circ f_1 (x)$

mit $f_1 = f_2 = f_3 = \exp$. Die Kettenregel ergibt hier

$$f'(x) = f_3'(f_2(f_1(x))) \cdot (f_2 \circ f_1)'(x) = f_3'(f_2(f_1(x))) \cdot f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$$

hier $= \exp(\exp(\exp(x))) \cdot \exp(\exp(x)) \exp(x)$.

5. <u>Ableitung der Umkehrfunktion:</u> Aus $f \circ f^{-1}(x) = x$ folgt mit der Kettenregel:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1,$$

also $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Anwendung: $f^{-1}(x) = \ln(x)$ $(x>0)$, also $f(y) = \exp(y)$

$$\Rightarrow \ln'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\exp'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Zusammen mit der Kettenregel können wir jetzt auch für $b \in \mathbb{R}$ die Ableitung von $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^b$ ausrechnen. Wg. $f(x) = \exp(b \cdot \ln x)$ erhalten wir

$$f'(x) = \exp(b \cdot \ln(x)) \cdot \frac{d}{dx} b \cdot \ln(x) = b\, x^{b-1},$$

in Übereinstimmung mit der Formel für natürliche Exponenten.