1.2 Grundlegende Eigenschaften reeller Funktionen

(1) Nullstellen

Ein einfaches aber wichtiges Charakteristikum reeller Funktionen sind ihre Nullstellen, das sind diejenigen Elemente des Definitionsbereichs von f, in denen f den Wert Null annimmt.

<u>Def.</u>: Es sei $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und für $x_0 \in D$ gelte $f(x_0) = 0$. Dann heißt x_0 eine Nullstelle von f.

<u>Bem.</u>: Geometrische Bedeutung: Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse.

Die exakte analytische Bestimmung von Nullstellen ist oft schwierig oder gar unmöglich. Lediglich für affin-lineare und quadratische Funktionen lassen sich einfache Formeln hierzu angeben:

Bsp.: (i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$.

Hier gilt $f(x) = 0 \iff ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$, es gibt also genau eine Nullstelle.

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2 + px + q$.

Hier ist $f(x) = 0$, falls

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

wertige Nullstellen gibt es nicht. Herleitung durch "quadratische Ergänzung":

$$f(x) = 0 \iff x^2 + px + q = 0 \iff \underbrace{(x+\tfrac{p}{2})^2}_{x^2+px+\frac{p^2}{4}} + q - \tfrac{p^2}{4} = 0$$

$$\iff (x+\tfrac{p}{2})^2 = \tfrac{p^2}{4} - q$$

$$\iff x = -p/2 \pm \sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q}$$

Jetzt können drei Fälle auftreten:

(a) $\frac{p^2}{4} - q > 0$: f besitzt zwei ~~[illegible]~~ Nullstellen

(b) $\frac{p^2}{4} - q = 0$: f besitzt genau eine Nullstelle

(c) $\frac{p^2}{4} - q < 0$: f besitzt keine Nullstelle.

Für kubische Polynome und solche vierten Grades existieren allgemeine Formeln zur Nullstellenbestimmung. Diese sind unhandlich und benutzen komplexe Zahlen, mit denen wir uns in dieser Vorlesung nicht befassen. Für Polynome n-ten Grades, $n \geq 5$, können derartige Formeln nicht existieren.

Es können jedoch einige allgemeine Aussagen gemacht werden, z. B.:

- Ein Polynom $P \neq 0$ vom Grad n besitzt höchstens n Nullstellen.
- Ein Polynom P mit ungeradem höchsten Exponenten besitzt mindestens eine Nullstelle.

(2) Verhalten "im Unendlichen"

Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, stellt sich die Frage, wie sich f verhält, wenn das Argument x über alle Grenzen wächst ($x \to \infty$ oder $x \to -\infty$). Grob gesprochen hat f drei Alternativen:

(a) $f(x)$ strebt einem festen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ entgegen, abgekürzt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.

(b) $f(x)$ wächst ebenfalls über alle Grenzen, ins Positive ($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$) oder ins Negative ($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$), entsprechend für $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

(c) Weder (a) noch (b): Oszillierendes (d.h. schwankendes) Verhalten.

Wir wollen das in (a) bzw. (b) genannte Verhalten genauer definieren. Dazu sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Fkt.

Def. Wir sagen f strebt mit $x \to \infty$ gegen den Wert $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0$, so daß $|f(x) - a| \le \varepsilon \ \forall x \ge R$.

Ist dies der Fall, schreiben wir $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$.

Weitere Sprechweisen:

- Man sagt auch, f konvergiert mit $x \to \infty$ gegen $a \in \mathbb{R}$.
- Der Grenzwert für $x \to -\infty$ ist folgendermaßen erklärt: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a \;:\Longleftrightarrow\; \lim\limits_{x \to \infty} f(-x) = a$.

Es gelten die folgenden

Rechenregeln: Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b \in \mathbb{R}$. λ und μ seien reelle Zahlen. Dann gelten:

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda a + \mu b$

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)\, g(x) = a \cdot b$

(iii) Falls $b \neq 0$: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

Sofern reelle Zahlen als Grenzwerte existieren, ist die Grenzwertbildung also verträglich mit den Rechenoperationen in $\mathbb{R}$.

Auch das in (b) beschriebene Verhalten (Wachstum über alle Grenzen) soll begrifflich etwas genauer gefaßt werden:

Def. Wir sagen, f konvergiert mit $x \to \infty$ uneigentlich gegen $+\infty$, falls gilt:

$$\forall M \geq 0 \quad \exists R \in \mathbb{R}, \text{ so daß } f(x) \geq M \quad \forall x \geq R.$$

In diesem Fall schreibt man $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Entsprechend werden erklärt:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} -f(x) = \infty$$

(f konvergiert für $x \to \infty$ uneigentlich gegen $-\infty$) und

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} f(-x) = \pm\infty$$

(f konvergiert für $x \to -\infty$ uneigentlich gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$).

Bei uneigentlichen Grenzwerten führt die Anwendung der o.g. Rechenregeln zu Fehlern. Ausdrücke wie „$\frac{\infty}{\infty}$" oder „$\frac{0}{0}$" sind nicht erklärt. Es gelten allerdings die folgenden Aussagen:

- $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$$

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ oder $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Bsp.: (1) $f(x) = x \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$, für $x=0$ bel.) $\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

(3) $f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Für $x \geq 0$ ist dann

$f(x) \geq x$, also $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$. Da $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$,

folgt $\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to \infty} e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

(4) Ist $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom vom Grad n, $a_n > 0$,

und x_0 die größte Nullstelle von P. Dann ist

für $x > x_0$ der Quotient $\frac{e^x}{P(x)}$ definiert. O.E. $x_0 \geq 1$.

$$\Rightarrow e^x / P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{1}{P(x)} \geq \frac{x^{n+1}}{P(x) \cdot (n+1)!}$$

$\geq \varepsilon_0 \cdot x$ für ein $\varepsilon_0 > 0$. Also haben wir

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{P(x)} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} P(x) \cdot e^{-x} = 0.$$

"Die e-Funktion wächst schneller als jedes Polynom."

(5) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ und $f(x) = \frac{a + b e^{cx}}{1 + e^{cx}}$.

Dann folgt aus (3) und den Rechenregeln:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$. Um den Grenzwert für $x \to \infty$

zu bestimmen, schreiben wir $f(x) = \frac{a e^{-cx} + b}{e^{-cx} + 1}$

und erhalten $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$.

(6) $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit führendem Koeffizienten

$a_n > 0$. Falls

n gerade: $\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \infty$. P ist also weder

surjektiv, noch injektiv;

n ungerade: $\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \pm\infty$. Jeder Wert $y \in \mathbb{R}$

wird angenommen, P ist surjektiv. Insbesondere besitzt P wie oben behauptet

mindestens eine Nullstelle.

(3) <u>Parität</u>

Hierbei sei eine Fkt. $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ mit symmetrischem Definitionsbereich D gegeben, d.h. wir setzen voraus, daß

$$x \in D \iff -x \in D.$$

<u>Def.</u> (1) f heißt <u>gerade</u>, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D$ gilt

(2) f heißt <u>ungerade</u>, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in D$ gilt.

<u>Bem.</u> / Bsp.: (1) Die Kenntnis der Parität einer Funktion erleichtert häufig die Untersuchung anderer Eigenschaften einer Fkt., etwa die Nullstellenbestimmung.

(2) Geometrische Interpretation:

f ist gerade $\iff G_f$ ist symmetrisch zur y-Achse

f ist ungerade $\iff G_f$ ist symmetrisch zum Ursprung

(3) $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ist gerade,
$f(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ist ungerade

(4) Bildet man Linearkombinationen von Funktionen, bleibt die Parität erhalten. Insbesondere sind alle Polynome, in denen nur gerade Exponenten auftreten, gerade. Treten nur ungerade Exponenten auf, so ist P ungerade.

Viele Funktionen sind weder gerade, noch ungerade. Sie können aber einfach zerlegt werden in ihren geraden und ihren ungeraden Anteil:

Man setzt $P_\pm f(x) := \frac{1}{2}(f(x) \pm f(-x))$.

Dann ist $P_+ f$ gerade und $P_- f$ ungerade. Ferner gilt $f = P_+ f + P_- f$, die Funktion f läßt sich also in einfacher Weise aus ihren geraden und ungeraden Restanteilen wieder zurückgewinnen.

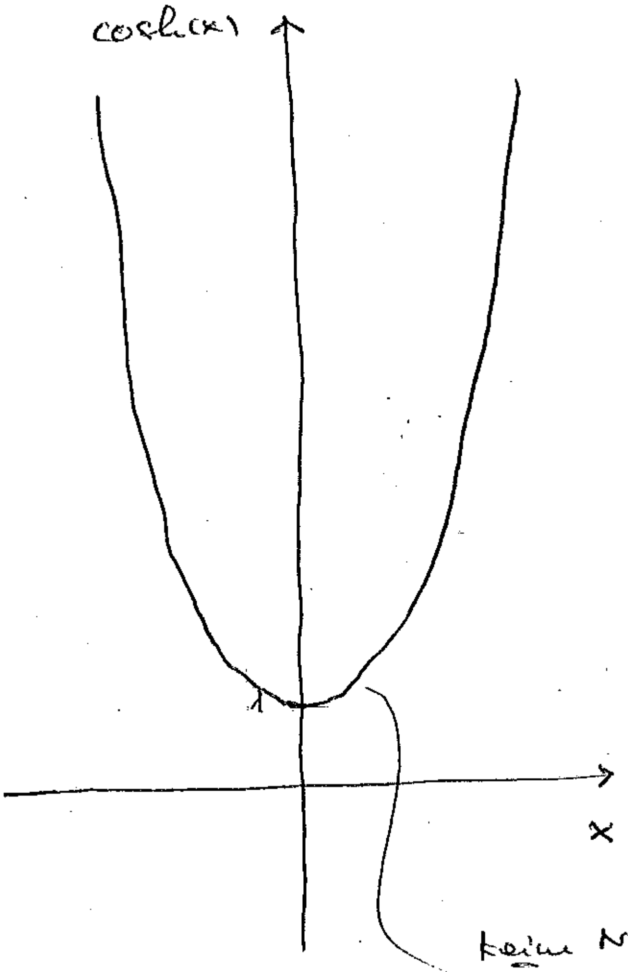
Bsp.: Die Exponentialfunktion $\exp : x \mapsto \exp(x) = e^x$ ist weder gerade noch ungerade. Ihre Symmetrisierungen werden jedoch so häufig verwendet, daß sie eigene Namen erhalten haben:

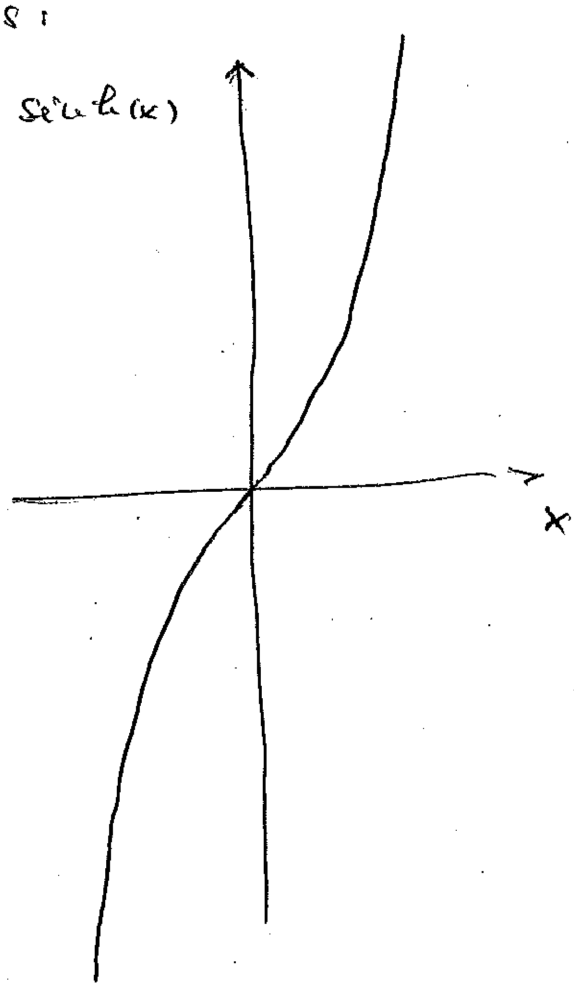
$$P_+ \exp(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(x) + \exp(-x)\right) =: \cosh(x)$$

heißt der <u>Cosinus Hyperbolicus</u> und

$$P_- \exp(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(x) - \exp(-x)\right) =: \sinh(x)$$

als <u>Sinus Hyperbolicus</u>. Zusammenfassend spricht man von den Hyperbelfunktionen. Ihre Graphen sehen etwa folgendermaßen aus:





keine Normalparabel, sondern für $x \gg 1$ $\approx \frac{1}{2} e^x$!

(4) <u>Monotonie</u>

Def.: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton steigend, falls für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt, dass $f(x) \leq f(y)$ $(f(x) < f(y))$. f heißt (streng) monoton fallend, wenn $-f$ (streng) monoton steigend ist.

Bsp.: (1) $f(x) = ax + b$ ist streng monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$, falls $a > 0$, und streng monoton fallend, falls $a < 0$ ist.

(2) $f(x) = b$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ sowohl monoton steigend als auch monoton fallend, beides nicht im strengen Sinne.

(3) Die Monome $M_n(x) = x^n$ sind auf $[0, \infty)$ streng monoton steigend. Betrachten wir $M_n : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto M_n(x) = x^n$, so gilt:

- Ist n gerade, so ist M_n streng monoton fallend,
- ist n ungerade, so ist M_n streng monoton steigend.

Betrachten wir die Monome auf der ganzen reellen Achse, ergibt sich:

- Ist n ungerade, so ist M_n streng monoton steigend, <u>aber</u>

$M_{2k} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto M_{2k}(x) = x^{2k}$ ist weder steigend noch fallend. (Monotonie ist i. allg. <u>keine globale Eigenschaft</u>!)

(4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{" } x \neq 0 \end{cases}$

ist weder (streng) monoton steigend, noch fallend, aber sowohl $f|_{(0,\infty)}: (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ als auch $f|_{(-\infty,0)}: (-\infty,0) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ sind streng monoton fallend.

(5) Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) = e^x$ ist streng monoton steigend. Begründung:
Für $x \in \mathbb{R}$ und $h > 0$ haben wir $e^x > 0$, $e^h > 1$ und damit (Funktionalgleichung!) $e^{x+h} = e^x \cdot \underbrace{e^h}_{>0} > e^x$.

(6) Die Umkehrfunktion einer streng monoton steigenden Funktion ist ebenfalls streng monoton steigend
Bew.: Sei $h > 0$, also $f(x+h) > f(x)\ \forall x \in D$.
Ann. $f^{-1}(y+h) \leq f^{-1}(y)$ führt sofort auf $y+h \leq y$, also auf $h \leq 0$. Widerspruch. |

Folglich ist $\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend
Ebenso ist $\sqrt[n]{\ }: [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$ streng monoton steigend.

(5) Beschränktheit

Def.: Es sei $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f

(i) <u>nach oben beschränkt</u>, wenn ein $S \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) \leq S$ für alle $x \in D$ gilt;

(ii) <u>nach unten beschränkt</u>, wenn ein $s \in \mathbb{R}$ existiert mit $s \leq f(x)$ für alle $x \in D$;

(iii) <u>beschränkt</u>, wenn f nach oben <u>und</u> nach unten beschränkt ist.

Die Zahl S aus (i) wird als eine <u>obere Schranke</u> von f bezeichnet. Entsprechend nennt man die Zahl s aus (ii) eine <u>untere Schranke</u> von f

Bem. + Bsp.: (1) Obere und untere Schranken sind nicht eindeutig bestimmt. Z.B. ist mit S auch $S+1$ eine obere Schranke einer Funktion f.

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := x^2$ ist nach unten beschränkt durch $s = 0$, aber nach oben unbeschränkt.

(3) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$ ist beschränkt. Mit $s = 0$ und $S = 1$ sind eine obere und eine untere Schranke gegeben.

(4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)=-e^x$ ist nach oben durch $S=0$ beschränkt, wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ jedoch nach unten nicht beschränkt.

<u>Def.</u>: Ist $f:\mathbb{R}\supset D\to\mathbb{R}$ beschränkt, so existiert eine <u>kleinste obere Schranke</u> von f. Sie heißt das <u>Supremum</u> von f und wird mit $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ oder kurz mit $\sup\limits_{D} f$ bezeichnet.

Entsprechend wird die <u>größte</u> <u>untere</u> <u>Schranke</u> einer nach unten beschränkten Funktion ihr <u>Infimum</u> genannt und mit $\inf\limits_{x\in D} f(x)$ bzw $\inf\limits_{D} f$ bezeichnet.

Ist $f:\mathbb{R}\supset D\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so existieren stets das Supremum und das Infimum von f. Das bedeutet jedoch nicht, dass diese Zahlen als größter bzw. kleinster Funktionswert auch angenommen werden. Als Bsp. soll noch einmal die logistische Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f(x)=\frac{a+be^{cx}}{1+e^{cx}} \quad \text{mit}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ dienen, wobei wir $a<b$ annehmen wollen. Für diese Funktion ist $f(x)<b$ für alle $x\in\mathbb{R}$, also b <u>eine</u> obere

obere Schranke von f. Wegen $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ gibt es keine kleinere obere Schranke, insofern gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = b$$

und entsprechend $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = a$. Aber es existiert kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = b$ und auch kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = a$, denn stets gilt $a < f(x) < b$.

Der größte bzw. kleinste Wert einer reellen Funktion erhält einen besonderen Namen (sofern existent):

Def.: Es sei $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.
Gilt $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ so heißt

$$f(x_0) =: \max_{x \in D} f(x) = \max_D f$$

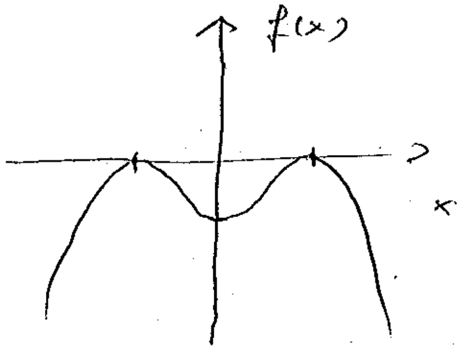
das <u>Maximum</u> von f und x_0 eine <u>Maximalstelle</u> von f. Entsprechend:
Gilt $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$, so heißt

$$f(x_0) =: \min_{x \in D} f(x) = \min_D f$$

das <u>Minimum</u> von f und x_0 eine <u>Minimalstelle</u> von f.

Bem. + Bsp.: (1) Gemeinsame Bezeichnung für Maximum oder Minimum: Extremum. Entsprechend: Extremalstelle

(2) Das Maximum einer Funktion ist – sofern existent – stets eindeutig bestimmt, aber es kann verschiedene Maximalstellen geben. Bsp.: $f(x) = -(1-x^2)^2$;



(3) Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x^2/2}$, die Gaussfkt.

Hierfür gilt $e^{-x^2/2} \leq 1$ (da $-\frac{x^2}{2} \leq 0$ und exp monoton wachsend ist) mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$ ist. Also haben wir

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(0) = e^{-0} = 1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

f ist aber auch nach unten beschränkt, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $e^{-x^2/2} > 0$, und wegen $\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2/2} = \lim_{y \to \infty} e^{-y} = 0$ ist dies auch das Infimum von f: $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$.

Da aber $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, besitzt die Funktion f kein Minimum.

(6) Grenzwerte im Endlichen

Um die Regularitätseigenschaften (Stetigkeit, Differenzierbarkeit) einer Funktion $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ zu formulieren, ist es sinnvoll den Begriffs des Grenzwerts einer Funktion einzuführen. Dazu sei

$$\bar{D} := \{x \in \mathbb{R} : \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ ist } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Diese Menge wird als der Abschluß von D in $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Nun sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \bar{D}$:

Def.: Wir sagen, daß f für x gegen x_0 gegen einen Wert $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, in Zeichen

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \to a \ (x \to x_0),$$

wenn folgendes gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Sind f und g Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so gelten einfache Rechenregeln für Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \mu \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

(iii) Falls $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$.

(7) Stetigkeit

Def.: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt

(i) stetig in $x_0 \in D$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt,

(ii) stetig in D, falls f in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

Bsp.: (1) $f(x) = x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ (wähle $\varepsilon = \delta$ in der Def.)

(2) Polynome sind stetig auf $\mathbb{R}$ (Regeln (i) und (ii))

(3) Rationale Funktionen sind stetig in ihrem Definitionsbereich ((2) und Regel (iii))

(4) Durch Potenzreihen definierte Funktionen wie exp sind stetig. Ebenso ist $\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig.
(Beide Aussagen nicht trivial!)

Bsp. für unstetige Fkten.:

(5) $f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$ ist unstetig im Nullpunkt. Hier liegt eine sogenannte Sprungstelle vor.

(6) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig im Nullpunkt, sog. "Unendlichkeitsstelle"

(7) Es gibt auch Funktionen, die in keinem Punkt ihres Definitionsbereiches stetig sind, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$ "Dirichlet's Monster"

Einige wichtige Aussagen über stetige Funktionen:

1. Zwischenwertsatz: Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $y_0 \in \mathbb{R}$ ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$, dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

   Dieser Satz garantiert in vielen Fällen die Existenz von Nullstellen oder Fixpunkten (das sind Lösungen der Gleichung $f(x) = x$).

2. Satz vom Maximum und Minimum: Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren $x_0, x_1 \in [a,b]$, so daß

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \forall x \in [a,b].$$

   Wir sagen in diesem Fall: f nimmt ihr Maximum und ihr Minimum in $[a,b]$ an. Dieser Satz gewährleistet in vielen Fällen die Existenz der Lösung von Extremwertaufgaben. Er gilt nicht
   - ohne die Stetigkeitsvoraussetzung
   - auf offenen, halboffenen oder unendlich ausgedehnten Intervallen.

3. Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion: Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $f: I \to J$ bijektiv und stetig. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: J \to I$ ebenfalls stetig

(8) Konvexität und Konkavität

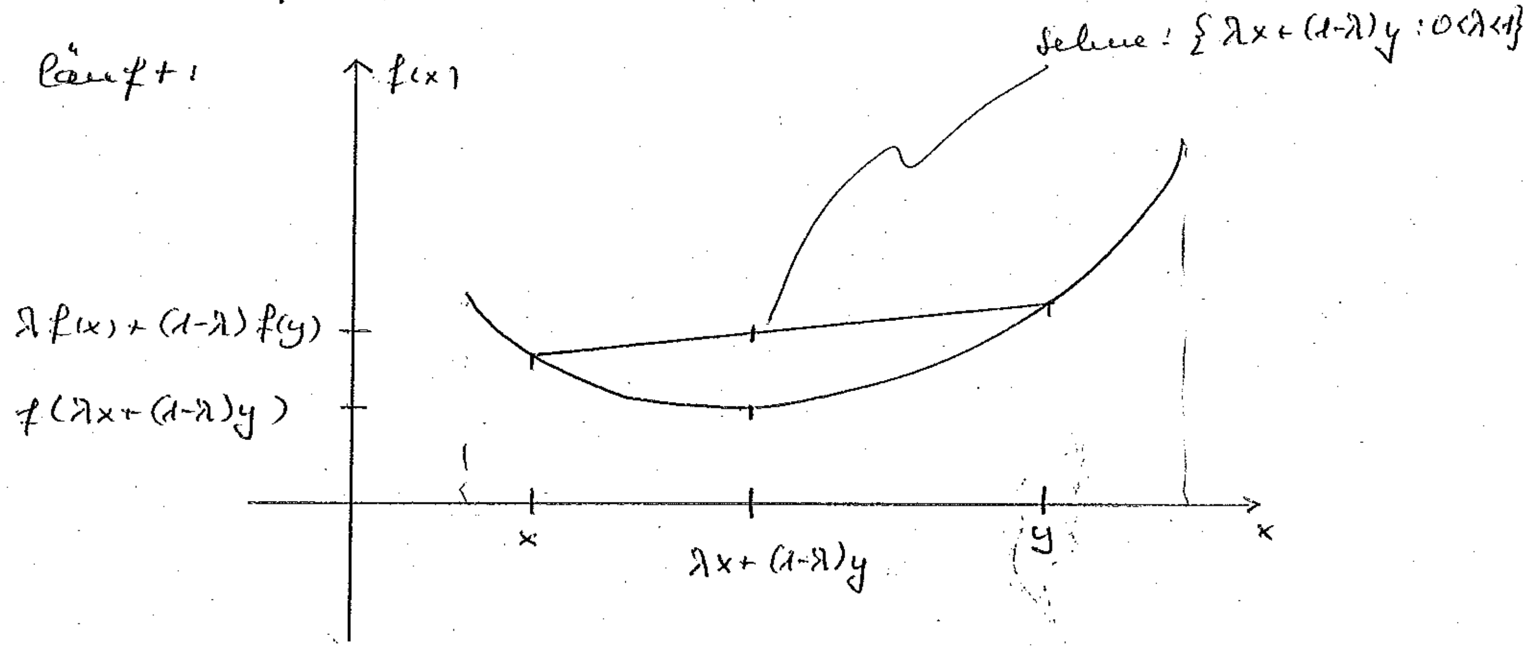
Diese Eigenschaften charakterisieren die Krümmung des Graphen einer Funktion.

Def.: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f konvex, falls für alle $x, y \in I$, $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad (K)$$

f heißt streng konvex, wenn in (K) "<" anstelle von "$\leq$" gilt. f heißt (streng) konkav, wenn $-f$ (streng) konvex ist.

Geometrische Interpretation: f ist konvex, wenn der Graph G_f unterhalb seiner Sekanten (= Sehnen) verläuft:

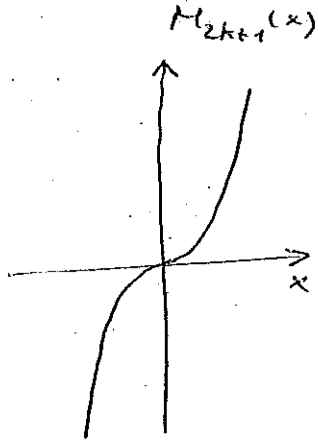


Andererseits ist f konkav, wenn der Graph G_f oberhalb seiner Sekanten verläuft.

Bsp.: (i) Streng konvex auf der ganzen reellen Achse sind die Exponentialfunktion und die Monome mit geraden Exponenten.

(ii) Affin-lineare Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ sowohl konvex als auch konkav, aber weder streng konvex, noch streng konkav.

(iii) Konvexität und Konkavität sind i. allg. keine globalen Eigenschaften. z. B. sind die Monome



$$M_{2k+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto M_{2k+1}(x) = x^{2k+1}$$

- streng konvex auf $[0,\infty)$
- streng konkav auf $(-\infty, 0]$.

Im Nullpunkt haben wir den Übergang von einem konkaven zu einem konvexen Verhalten. Einen solchen Punkt (auch wenn der Übergang von konvex zu konkav ist) nennt man einen <u>Wendepunkt</u>.

(iv) Beispiele streng konkaver Funktionen sind

$$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$$

sowie

$$\sqrt[k]{} : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt[k]{x}$$

Die Konvexität einer Funktion mit Hilfe der Definition nachzurechnen ist oft mühsam. Die Differentialrechnung wird uns hierfür ein leicht handhabbares Kriterium liefern.

Aus den Eigenschaften monoton steigend / fallend einerseits und konvex / konkav andererseits lassen sich vier verschiedene Kombinationen bilden, die eigene Namen erhalten:

Def.: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt

Bsp.:

(i) progressiv wachsend, wenn f monoton wachsend und konvex ist; — $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $[0,\infty) \to \mathbb{R}$

(ii) degressiv wachsend, wenn f monoton wachsend und konkav ist; — $\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\sqrt{}: [0,\infty) \to \mathbb{R}$

(iii) progressiv fallend, wenn f monoton fallend und konkav ist; — $x \mapsto -e^x$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

iv) degressiv fallend, wenn f monoton fallend und konvex ist. — $x \mapsto \frac{1}{x}$, $(0,\infty) \to \mathbb{R}$

Bezug zu den Kostenfunktionen: Eine Kostenfunktion $K: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto K(x) = K_{fix} + K_{var}(x)$ heißt

- neoklassisch, wenn sie degressiv wachsend ist,
- ertragsgesetzlich, wenn sie auf $[0, x_0]$ degressiv und auf $[x_0, \infty)$ progressiv wachsend ist.