Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WS 2021/22
13.01.2022
Blatt 10

ÜBUNGEN ZU
MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER I

1. (Bei dieser Aufgabe wird auch die Rechnung bewertet.) Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad F\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{F}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine 3×3-Matrix A derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $F(x) = Ax$.

2. (Hier werden nur die Ergebnisse bewertet.) Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}-3 & -1 & -6\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

und die Vektoren $x = (-3, 2, -1)^\top, y = (4, 0, -2)^\top$ und $z = (8, -1, 1)^\top$.

(a) Berechnen Sie Ax, Ay und Az und geben Sie (ohne weitere Rechnung) an, wieviele Lösungen das Gleichungssystem $Au = 0$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie unter Anwendung der Matrixrechenregeln alle Lösungen u von $Au = b$ für $b = (-26, 10, 24)^\top$, die sich aus der Kenntnis von Ax und Ay ergeben.

Bitte wenden!

3. (Bei dieser Aufgabe wird auch die Rechnung bewertet.) Zwei Unternehmen stellen vergleichbare Produkte P_1 und P_2 her, die bei Markteinführung im Jahr 2020 von gleich vielen Kunden gekauft wurden. Jährlich wechseln 1/3 der Käufer von P_1 zu P_2, umgekehrt nur 1/6. Die Gesamtzahl der Kunden bleibt gleich.

Wie groß ist der Anteil der Käufer von P_2 im Jahr 2028? Wird das Produkt P_1 langfristig vom Markt verschwinden?

4. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen richtig oder falsch sind:

(a) Zu jeder linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt es genau eine $n \times m$-Matrix A, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ $\varphi(x) = Ax$ gilt.

(b) Zu jeder linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt es genau einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$ gilt.

(c) Zu jeder linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine reelle Zahl a, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ $\varphi(x) = ax$ gilt.

(d) Für jeden Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ wird durch $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \varphi(x) := \langle a, x \rangle\, x$ eine lineare Abbildung definiert.

Abgabe: Mo., 24.01.2022 (bis 13.00 Uhr)
Besprechung: Mo., 24.01.2022