Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

(K. Steffen, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, WS 2006/07)

1.3 Wurzeln, Potenzen mit beliebigen Exponenten, Logarithmen

DISKUSSION (Wurzelrechnung):

1) Es ist eine fundamentale Tatsache, dass jede *Potenzgleichung* $x^n = a$ mit natürlichem Exponenten $n \geq 2$ und mit positiver rechter Seite $a \in \mathbb{R}_{>0}$ genau eine positive reelle Lösung $x > 0$ hat. Man kann dies so verstehen: Für einen kleinen positiven Wert von x ist x^n so klein wie man will, also auch kleiner als a; für einen großen Wert von x ist aber x^n so groß wie man will, also größer als a. Daher muss es irgendwo dazwischen einen Wert von x geben, für den x^n genau so groß ist wie a, eben eine Lösung der Potenzgleichung. (Dass dieses "Zwischenwertargument" gültig ist, liegt an einer fundamentalen Vollständigkeitseigenschaft des Bereichs der reellen Zahlen $\mathbb{R}$; es gibt darin eben "alle Zahlen, die man braucht". Im Bereich der rationalen Zahlen hat dagegen schon eine so einfache Gleichung wie $x^2 = 2$ keine Lösung.) Weil nun x^n bei Vergößerung von x größer wird und bei Verkleinerung von x kleiner (siehe 1.4), kann es auch keine weiteren positiven Lösungen geben. Für $x^n = 0$ ist natürlich $x = 0$ die eindeutige Lösung.

- *Die eindeutige positive reelle Lösung der Potenzgleichung $x^n = a$ mit Exponent $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und rechter Seite $a > 0$ heißt die* **n–te Wurzel** *aus a und wird $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ oder $\boldsymbol{a^{1/n}}$ notiert; außerdem setzt man noch $\sqrt[n]{0} := 0$. Im Fall $n = 2$ spricht man auch von der* **Quadratwurzel** *aus a und schreibt dafür einfach $\boldsymbol{\sqrt{a} = a^{1/2}}$.*

Demnach gilt $(\sqrt[n]{a})^n = a$ für $a \geq 0$ und $\sqrt[n]{a}$ ist die einzige nichtnegative Zahl mit n-ter Potenz a. Für $a = b^n$ mit $b \geq 0$ hat auch b diese Eigenschaften (nichtnegativ mit n-ter Potenz a), daher gilt auch $\sqrt[n]{b^n} = b$, wenn $b \geq 0$ ist. Der Name "Wurzeln" wird manchmal auch für Lösungen von allgemeineren Gleichungen als der obigen Potenzgleichung gebraucht, z.B. für Lösungen von algebraischen Gleichungen.

2) Um mit Wurzeln richtig umzugehen, ist es ganz wichtig, folgendes zu beachten:

- *Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ werden niemals aus negativen Zahlen a gezogen und haben niemals negative Werte.*

Die Potenzgleichung $x^n = a$ kann zwar auch negative Lösungen haben und auch für negative rechte Seiten lösbar sein, aber in diesem Fall bezeichnen wir die Lösungen nicht mit dem Symbol $\sqrt[n]{a}$. Das ist sinnvoll, weil sonst die Wurzelrechengesetze wie $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ falsch werden. (Das Beispiel $-1 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1^2} = 1$ haben wir ja schon gesehen; die Rechnung ist ungültig, weil im ersten Schritt eine *negative* Quadratwurzel gezogen wird!) Außerdem machen negative Wurzeln gerade in der Ökonomie, wo die relevanten Größen oft positiv sind, meist gar keinen Sinn.

Im Übrigen kann man auch die negativen Lösungen der Potenzgleichung durch positive Wurzeln aus positiven Zahlen ausdrücken. Für gerade $n = 2m$ z.B. hat $x^n = a$ keine Lösung, wenn $a < 0$, genau die Lösung $x = 0$, wenn $a = 0$, und genau die zwei Lösungen

$\sqrt[n]{a} > 0$ und $-\sqrt[n]{a} < 0$, wenn $a > 0$ ist. (Das erkennt man sofort aus $x^n - a = (x^m)^2 - (\sqrt{a})^2 = (x^m - \sqrt{a})(x^m + \sqrt{a})$.) Für ungerade $n = 2m+1$ hat zwar $x^n = a$ genau eine Lösung für jede rechte Seite $a \in \mathbb{R}$, aber diese Lösung ist negativ für $a < 0$ (weil Potenzen nichtnegativer Zahlen wieder nichtnegativ sind) und sie kann mit der positiven n-ten Wurzel aus der (positiven) Gegenzahl $|a| = -a$ in der Form $-\sqrt[n]{|a|} < 0$ ausgedrückt werden (wie man aus $(-x)^n = (-1)^n x^n = -a$ für $x^n = a$ und ungerade n abliest.) Obwohl beispielsweise $x^3 = -8$ genau eine reelle Lösung hat, nämlich $x = -2$, bezeichnen wir diese Lösung also *nicht* mit $\sqrt[3]{-8}$, sondern mit $-\sqrt[3]{8}$. (*Warnung*: Das handhaben nicht alle Autoren so und schreiben durchaus $\sqrt[3]{-8}$. Das Wurzelrechengesetz $\sqrt[2]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$ gilt dann aber für $a = -8$ nicht mehr, weil -8 überhaupt keine 6-te Wurzel hat. Daher ist es besser, unserer Konvention zu folgen und $\sqrt[n]{a}$ immer nur für die *nichtnegativen* Wurzeln aus *nichtnegativen* Zahlen a zu schreiben.)

3) **Rechenregeln für Wurzeln** lassen sich aus ihrer Definition in 1) und aus den Potenzgesetzen herleiten für nichtnegative(!) Zahlen a und b:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{0} &= 0\,, \qquad \sqrt[n]{1} = 1\,,\\
(\sqrt[n]{a})^n &= a = \sqrt[n]{a^n}\,,\\
(\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m}\,,\\
\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[m\cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\,,\\
\sqrt[n]{a\cdot b} &= \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\,,\\
\sqrt[n]{a/b} &= \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}\,,
\end{aligned}$$

wobei zuletzt natürlich $b > 0$ sein muss. Insbesondere ist die n-te Wurzel des Kehrwertes gleich dem Kehrwert aus der n-ten Wurzel, $\sqrt[n]{1/b} = 1/\sqrt[n]{b}$, und dafür wird auch $b^{-1/n}$ geschrieben. Die ersten beiden Regeln haben wir schon gesehen, die dritte gilt, weil beide Seiten die n–te Potenz a^m haben, die vierte, weil alle drei Terme die $(m\cdot n)$–te Potenz a besitzen, die fünfte und sechste schließlich, weil beide Seiten n–te Potenz ab bzw. a/b haben. Die Wurzelrechengesetze sind Spezialfälle der Rechengesetze für Potenzen mit gebrochenen Exponenten, man braucht sie sich daher nicht zu merken, wenn man alle Wurzelausdrücke sytematisch als Potenzen umschreibt. Die ganze Wurzelrechnung ist im Grunde Teil der allgemeineren Potenzrechnung, die wir anschließend behandeln. ■

BEISPIELE: (*zur Wurzelrechnung:*)

1) Die allgemeine **quadratische Gleichung**

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\text{mit } \; a, b, c \in \mathbb{R} \; \text{ und } \; a \neq 0)$$

löst man durch sog. *quadratische Ergänzung* und Wurzelziehen so:

$$0 = ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,.$$

<u>Fall 1</u> $b^2 - 4ac < 0$: Dann gibt es keine reelle Lösung (weil die linke Seite der letzten Gleichung immer nichtnegativ ist);

<u>Fall 2</u> $b^2 - 4ac = 0$: Dann gibt es genau eine Lösung $x = -\dfrac{b}{2a}$;

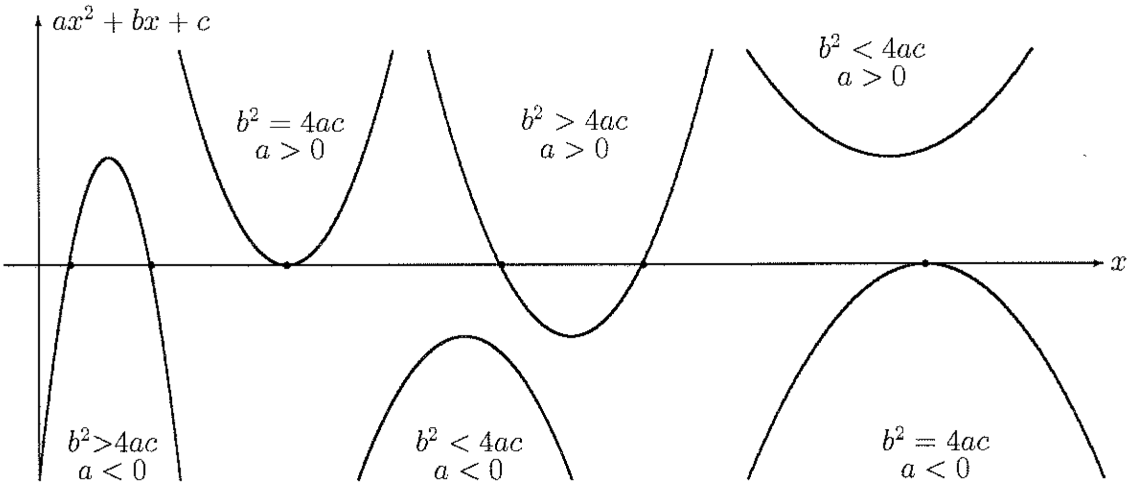
<u>Fall 3</u> $b^2 - 4ac > 0$: Dann gibt es genau zwei Lösungen, nämlich die beiden Zahlen x, für die $x + \frac{b}{2a}$ die positive bzw. die negative Quadratwurzel aus $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ ist, also

$$\boxed{x_1\,, x_2 = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}}\;.$$

Das ist die bekannte Lösungsformel für quadratische Gleichungen; sie gilt auch im zweiten Fall, liefert dann jedoch nur eine Lösung $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Schreibt man die quadratische Gleichung mit Division durch den führenden Koeffizienten a um, so erhält man die sog. "p–q–Formel"

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1\,, x_2 \;=\; -\tfrac{1}{2}p \;\pm\; \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}\,, \quad \text{wenn} \;\; p^2 \geq 4q\,.$$

Das Erste, was man bei einer vorgelegten quadratischen Gleichung zu tun hat, ist, das *Vorzeichen der Diskriminante* $b^2 - 4ac$ bzw. $p^2 - 4q$ festzustellen; denn dieses Vorzeichen entscheidet darüber, ob die Gleichung zwei, eine oder keine Lösung besitzt. Geometrisch kann man die verschiedenen Fälle darstellen, indem man den Graphen der Funktion von x zeichnet, die durch die linke Seite der Gleichung gegeben ist. Man erhält dann nach oben ($a > 0$) bzw. unten ($a < 0$) geöffnete Parabeln, welche die horizontale x-Achse nicht treffen (Fall 1), in einem Punkt berühren (Fall2), oder in zwei Punkten schneiden, die den Nullstellen entsprechen (Fall 3).



2) Für algebraische Gleichungen vom Grad 3 oder 4 gibt es, wie schon gesagt, auch noch Lösungsformeln, in denen ineinander verschachtelte Wurzelausdrücke vorkommen; diese Formeln sind aber zu kompliziert, um von praktischem Nutzen zu sein. Für Gleichungen von noch größerem Grad $n \geq 5$ gibt es aber (beweisbar) auch keine solchen Lösungsformeln mehr. Man ist dann auf Verfahren der numerischen Mathematik zur näherungsweisen Berechnung der Lösungen (wenn es welche gibt!) angewiesen. Das schließt natürlich nicht aus, dass man in speziellen Fällen doch alle Lösungen einer algebraischen Gleichung von höherem Grad bestimmen kann. Bei einer kubischen Gleichung (Grad 3) z.B., bei der man eine Lösung schon kennt, führt das in 1.2 beschriebene Reduktionsverfahren auf eine quadratische Gleichung, aus der man dann die weiteren Lösungen berechnen kann (bzw. erkennt, dass es keine weiteren gibt). Ein explizit lösbarer Typ von Gleichungen vierten Grades, der gelegentlich vorkommt, ist die sog. **biquadratische Gleichung**

$$ax^4 + bx^2 + c = 0\,.$$

Dies kann man als quadratische Gleichung $ay^2 + by + c = 0$ für die Variable $y := x^2$ auffassen. Von deren nichtnegativen Lösungen y (Quadrate $y = x^2$ von reellen Zahlen sind ja nie negativ) nimmt man dann die Wurzeln $\sqrt{y}$ und $-\sqrt{y}$ und erhält damit alle der maximal 4 Lösungen der biquadratischen Gleichung. (Wenn die quadratische Gleichung für y keine, oder nur negative Lösungen hat, so besitzt die biquadratische Gleichung keine Lösungen.)

3) Die Auflösung von **Gleichungen, die Wurzelterme enthalten** ist unter Umständen möglich, indem man die Wurzeln durch Quadrieren bzw. Potenzieren beseitigt. Beispiel:

$$\begin{aligned} & x + \sqrt{2x+3} = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & \sqrt{2x+3} = -x \\ \Longrightarrow\quad & 2x+3 = x^2\,, \quad \text{also} \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2\,. \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir quadriert; das ist aber keine Äquivalenzumformung, also müssen wir durch Einsetzen in die ursprünglich Gleichung noch nachprüfen, ob die gefundenen Werte Lösungen sind: Für $x = -1$ ist die Ausgangsgleichung erfüllt, für $x = 3$ aber nicht, also ist $x = -1$ ihre einzige Lösung. ($x = 3$ löst die Gleichung $x - \sqrt{2x+3}$, also die ursprüngliche Gleichung mit der negativen Wurzel aus $2x + 3$; wir bezeichnen mit $\sqrt{\cdots}$ aber immer nur nichtnegative Zahlen! Man hätte in der obigen Rechnung daher gleich mit notieren können, dass $-x \geq 0$ sein muss, und damit $x = 3$ ausgeschlossen.) In komplizierteren Fällen hilft manchmal mehrfaches Quadrieren:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} + \sqrt{x+3} - \sqrt{x+8} = 0 && \Longleftrightarrow && \sqrt{x} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+8} \\ \Longrightarrow\quad & (\sqrt{x} + \sqrt{x+3})^2 = x + 8 && \Longleftrightarrow && x + 2\sqrt{x}\sqrt{x+3} + x + 3 = x + 8 \\ \Longleftrightarrow\quad & 2\sqrt{x}\sqrt{x+3} = 5 - x && \Longrightarrow && 4x(x+3) = (5-x)^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & 3x^2 + 22x - 25 = 0 && \Longleftrightarrow && x = -\tfrac{22}{6} \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{22^2 + 300} = -\tfrac{22}{6} \pm \tfrac{28}{6}\,. \end{aligned}$$

Von den beiden gefundenen Werten für x ist nur $x = 1$ Lösung der ursprünglichen Gleichung, der andere Wert $x = -\frac{50}{6}$ nicht. (Man hätte von vorneherein bemerken können, dass $x \geq 0$ sein muss, da sonst $\sqrt{x}$ nicht definiert ist.) Wenn vier Wurzelausdrücke auftreten, so kann man sie im Allgemeinen nicht mehr durch mehrfaches Quadrieren wegschaffen. In der Algeba aber wird bewiesen, dass sich eine "Wurzelgleichung" immer (auf kompliziertere Weise) in eine algebraische Gleichung umformen lässt.

4) Anwendungen der Lösungsformeln für quadratische Gleichungen und der Wurzelrechnung in der Wirtschaftswissenschaft behandeln wir in Kap. 2. Allgemeine n–te Wurzeln benötigt man z.B. für die Berechnung des *Effektivzinssatzes* vor für einen Vorgang, bei dem ein Anfangskapital K_0 durch Verzinsung zu evtl. wechselnden Zinsfüßen, wie z.B. beim Sparen mit wachsendem Zins, in einer gegebenen Anzahl n von Jahren auf einen Kapitalendwert K_n anwächst. Der Effektivzinssatz für diesen Vorgang ist derjenige Zinsfuß p_*, bei dem n-fache jährliche Aufzinsung dasselbe Ergebnis liefert. Für den zu p_* gehörenden Aufzinsungsfaktor $q_* = 1 + \frac{1}{100}p_*$ bedeutet das

$$K_n = q_*^n K_0 \qquad \text{bzw.} \qquad q_*^n = \frac{K_n}{K_0}\,.$$

Das ist eine Potenzgleichung n-ter Ordnung für die Unbekannte q_*, und die einzige positive Lösung (Aufzinsungsfaktoren sind ja stets positiv) ist

$$q_{\text{eff}} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \qquad \text{also} \qquad p_{\text{eff}} = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right) \quad \text{(Prozent)}\,.$$

In komplizierteren Fällen führt die Effektivzinsberechnung aber auf eine algebraische Gleichung, die nicht mehr durch Wurzelziehen auflösbar ist. Das haben wir ja schon zur Effektivzinsgleichung für Annuitätendarlehen $q_*^n - \alpha\frac{q_*^n - 1}{q_* - 1} = \beta$ bemerkt. ■

Potenzen a^s mit beliebigen reellen Exponenten s treten in mathematischen Modellen für ökonomische Vorgänge häufig auf, insbesondere deswegen, weil Vorgänge uneingeschränkten Wachstums (oder Verfalls) durch *Exponentialfunktionen* $f(x) = a^x$ von einer reellen Variablen x beschrieben werden. Dabei will man die Funktionswerte selbstverständlich nicht nur für ganze Zahlen x berechnen können, sondern eben für alle reellen Zahlen. Wenn man eine sinnvolle und nützliche Potenzrechnung für Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten erklären will, so müssen natürlich die üblichen Potenzrechengesetze gelten, die wir für ganze Exponenten in Abschnitt 1.1 wiederholt haben. Aus dieser Forderung ergibt sich aber schon zwangsläufig, wie man die allgemeinen Potenzen zu definieren hat. Betrachten wir zum Beispiel einen Stammbruch $s = 1/n$ als Exponent (mit $n \in \mathbb{N}$), so sollte für die zu erklärende Zahl $a^{1/n}$ gelten $(a^{1/n})^n = a^{(1/n)\cdot n} = a^1 = a$, also müssen wir festsetzen $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$ (wobei natürlich $\sqrt[1]{a} := a$ zu verstehen ist; die Notation $a^{1/n}$ für $\sqrt[n]{a}$ haben wir ja auch schon bei der Wurzelrechnung angegeben). Wegen der Schwierigkeiten beim Wurzelziehen aus negativen Zahlen sind wir an dieser Stelle übrigens gezwungen, uns auf das Potenzieren von *positiven Basen* $a > 0$ zu beschränken.

Im nächsten Schritt wollen wir nun $a^{m/n}$ mit einer rationalen Zahl m/n als Exponenten erklären (mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$). Dafür sollte dann $(a^{m/n})^n = a^{(m/n)\cdot n} = a^m$ gelten, also haben wir $a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ festzusetzen. Hier gibt es ein kleines Problem, weil man dieselbe rationale Zahl r ja (durch Erweitern bzw. Kürzen) auf verschiedene Weise als Bruch $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$ schreiben kann (mit ganzen Zählern k, m und natürlichen Nennern l, n), und der Wert der Potenz mit diesem Exponenten darf natürlich nicht davon abhängen, wie man den Exponenten als Bruch geschrieben hat. Mit $m \cdot l = k \cdot n$ und den Rechenregeln für das Potenzieren mit ganzen Exponenten findet man aber $(\sqrt[n]{a^m})^{l\cdot n} = ((\sqrt[n]{a^m})^n)^l = (a^m)^l = a^{m\cdot l} = a^{k\cdot n} = (a^k)^n = ((\sqrt[l]{a^k})^l)^n = (\sqrt[l]{a^k})^{l\cdot n}$, d.h. sowohl $\sqrt[n]{a^m}$ als auch $\sqrt[l]{a^k}$ sind die $(l\cdot n)$–te Wurzel aus $a^{k\cdot n}$ und damit gleich. Das Problem ist also zum Glück nicht vorhanden und unsere Definition von a^r für $r \in \mathbb{Q}$ unabhängig von der Darstellung von r als Bruch.

Im letzten Schritt müssen wir jetzt noch a^s für irrationale Zahlen s erklären. Da man jede reelle Zahl s beliebig gut zwischen rationale Zahlen r, t einschachteln kann, z.B. indem man die Dezimalbruchentwicklung von s erst sehr weit nach dem Dezimalpunkt abbricht (um r zu erhalten) und dann die letzte Dezimale um 1 erhöht (um t zu erhalten), werden wir das natürlich so machen wollen, dass die zu definierende Zahl a^s zwischen den schon definierten Potenzen a^r und a^t liegt, wenn $r < s < t$ ist. Es lässt sich zeigen — allerdings mit einigem mathematischem Aufwand —, dass durch diese Bedingung die Zahl a^s schon eindeutig festgelegt ist. Wir brauchen das nicht näher zu erklären, weil man für praktische Zwecke doch immer nur mit rationalen Exponenten rechnet (wie auch die allgemeine Potenzfunktion in einem Taschenrechner). Statt a^s genau zu kennen, genügt es eben einen guten Näherungswert a^r mit rationalem Exponenten r zu wissen, und der Unterschied zwischen a^s und a^r ist so klein, wie man will, wenn man nur die rationale Zahl r nahe genug bei der reellen Zahl s gewählt hat. Wir fassen die Definition der Potenzen mit allgemeinen Exponenten zusammen und besprechen die Rechenregeln dafür in folgender

DISKUSSION (Potenzrechnung mit beliebigen reellen Exponenten):

1) • *Für positive Zahlen $a > 0$ und rationale Zahlen $r = m/n$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ wird die* **Potenz a^r der Basis a mit dem gebrochenen Exponenten r** *erklärt durch*

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Für beliebige reelle Zahlen $s \in \mathbb{R}$ ist dann die **Potenz a^s der Basis a mit dem reellen Exponenten s** *erklärt als die eindeutige reelle Zahl, die zwischen a^r und a^t liegt, wenn immer der Exponent s zwischen den rationalen Zahlen r und t ist.*

Für einen irrationalen Exponenten wie etwa $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$ bedeutet diese Definition also, dass $a^{\sqrt{2}}$ zwischen $a^{1.4} = a^{7/5} = (\sqrt[5]{a})^7$ und $a^{1.5} = a^{3/2} = (\sqrt{a})^3$ liegt, genauer zwischen $a^{1.41} = a^{141/100} = (\sqrt[100]{a})^{141}$ und $a^{1.42} = a^{71/50} = (\sqrt[50]{a})^{71}$, noch genauer zwischen $a^{1.414} = a^{707/500} = (\sqrt[500]{a})^{707}$ und $a^{1.415} = a^{283/200} = (\sqrt[200]{a})^{283}$, usw.; je besser man $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen r wie $1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots$ approximiert hat, desto besser approximieren die Potenzen der Basis a mit diesen rationalen Exponenten (also Potenzen, die man mit Wurzelziehen berechnen kann) auch die Potenz $a^{\sqrt{2}}$.

2) • *Potenzen mit allgemeinen Exponenten s sind nur für* **positiven Basen** $a > 0$ *erklärt und haben stets* **positive Werte** a^s.

Das muss betont werden; denn sonst können die Potenzrechengesetze nicht gelten. (Z.B. kann für $a > 0$ dann $-a = (-a)^{1/2+1/2} = ((-a)^{1/2})^2$ nicht richtig sein, weil Quadrate nie negativ sind, und aus demselben Grund könnte $b^s = b^{s/2} \cdot b^{s/2}$ nicht gelten, wenn $b^s < 0$ wäre.) Eine Ausnahme hiervon machen wir nur bei ganzzahligen Exponenten, wo wir $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n Faktoren) für beliebige reelle Basen definiert haben, wenn $n \in \mathbb{N}$ ist, sowie $a^{-n} := 1/a^n$ für reelle Basen $a \neq 0$. Es ist auch sinnvoll, noch $0^s := 0$ zu setzen, allerdings nur für positive Exponenten $s > 0$. Die Potenz "0^0" bleibt undefiniert, weil es genau so gute Gründe gibt, diesem Ausdruck den Wert 0 zuzuweisen (es ist nämlich $0^s = 0$ für $s > 0$), wie es Argumente für den Wert 1 gibt (nämlich $a^0 = 1$ für Basen $a \neq 0$). Man sagt: "0^0" ist ein "*unbestimmter Ausdruck*". Für negative Exponenten $-s < 0$ kann man 0^{-s} auch nicht sinnvoll erklären, weil es das Reziproke zu 0^s sein müsste, wenn die Potenzrechenregeln gelten sollen, aber der Kehrwert von $0^s = 0$ kann nicht gebildet werden. Die Ausnahmen ändern aber nichts am Grundsatz: *Sobald in einer Rechnung nichtganze Exponenten auftauchen, müssen die Basen positiv sein*, sonst kann Unfug entstehen wie eben $-1 = (-1)^1 = (-1)^{1/2+1/2} = (-1)^{1/2} \cdot (-1)^{1/2} = ((-1)^{1/2})^2 \geq 0$.

3) Die Rechenregeln für den Umgang mit Potenzen von positiven Basen $a > 0$ und $b > 0$ zu beliebigen reellen Exponenten s, t sind folgende **Potenzgesetze**:

- *Potenzen mit Exponent 0 und Potenzen von 1 mit beliebigem Exponenten haben den Wert 1:*
$$a^0 = 1\,, \qquad 1^s = 1\,;$$
- *man multipliziert / dividiert Potenzen derselben Basis, indem man die Exponenten addiert / subtrahiert:*
$$a^s \cdot a^t = a^{s+t}\,, \qquad a^s / a^t = a^{s-t}\,;$$
- *man bildet den Kehrwert einer Potenz, indem man das Vorzeichen des Exponenten umkehrt:*
$$1/a^s = a^{-s}\,;$$
- *man potenziert eine Potenz, indem man die Exponenten multipliziert:*
$$(a^s)^t = a^{s \cdot t}\,;$$
- *man multipliziert / dividiert zwei Potenzen mit demselben Exponenten, indem man das Produkt / den Quotienten der Basen mit diesem Exponenten potenziert:*
$$a^s \cdot b^s = (a \cdot b)^s\,, \qquad a^s / b^s = (a/b)^s\,.$$

All dies muss man nur für rationale Exponenten zeigen, für reelle Exponenten folgt es dann aufgrund der Definition der Potenz durch Approximation mit Potenzen zu rationalen Exponenten automatisch. Für rationale Exponenten $s = \frac{k}{l}$ und $t = \frac{m}{n}$ (mit $k, m \in \mathbb{Z}$ und $l, n \in \mathbb{N}$) aber sind die angegebenen Potenzgesetze unmittelbare Folgerungen aus den Gesetzen der Wurzelrechnung und den bereits bekannten Potenzrechenregeln bei ganzen Exponenten. Zum ersten Gesetz $a^0 = 1$ und $1^s = 1$ brauchen wir nichts mehr zu sagen, und die andern Potenzgesetze ergeben sich dann so:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[n]{b})^m = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^m = (\sqrt[n]{a \cdot b})^m = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} ,$$

$$(a^{\frac{k}{l}})^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{(\sqrt[l]{a})^k}\right)^m = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[l]{a}}\right)^k\right)^m = \left(\sqrt[l \cdot n]{a}\right)^{k \cdot m} = a^{\frac{k \cdot m}{l \cdot n}} = a^{\frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n}} ,$$

$$a^{\frac{k}{l}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{kn}{ln}} \cdot a^{\frac{lm}{ln}} = (\sqrt[ln]{a})^{kn} \cdot (\sqrt[ln]{a})^{lm} = (\sqrt[ln]{a})^{kn+lm} = a^{\frac{kn+lm}{ln}} = a^{\frac{k}{l}+\frac{m}{n}} ,$$

und dieselben Rechnungen sind auch gültig für Division statt Multiplikation. Das Gesetz über den Kehrwert einer Potenz ist ein Spezialfall der Division, nämlich $1/a^s = 1^s/a^s = (1/a)^s = (a^{-1})^s = a^{-s}$.

4) Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ hatten wir definiert als eindeutige positive Lösung der Potenzgleichung $x^n = a$. Nun können wir solche Gleichungen auch für beliebige reelle Exponenten $s \neq 0$ betrachten und lösen:

- *Die eindeutige positive Lösung der Potenzgleichung $x^s = a$ zu gegebenem Exponenten $s \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ und rechter Seite $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $x = a^{1/s}$; hierfür schreibt man auch $\sqrt[s]{a}$.*

Auf Taschenrechnern sind diese Wurzeln zu nichtganzen Exponenten s (mit der Funktionsbezeichnung " $\sqrt[x]{y}$ ") meistens vorhanden und alle früher angegebenen Wurzelrechengesetze gelten für solche allgemeineren Wurzeln $\sqrt[s]{a}$, bei denen s nicht mehr eine natürliche Zahl sein muss. Diese Gesetze für das Wurzelrechnen braucht man sich aber nicht zu merken; denn es handelt sich einfach um Spezialfälle der Potenzgesetze, bei denen die Exponenten in der Form $\frac{1}{s}$ geschrieben sind:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[s]{a}\right)^s = a = \sqrt[s]{a^s} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(a^{1/s}\right)^s = a^1 = \left(a^s\right)^{1/s} , \\
\left(\sqrt[s]{a}\right)^t = \sqrt[s]{a^t} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(a^{1/s}\right)^t = a^{t/s} = \left(a^t\right)^{1/s} , \\
\sqrt[s]{\sqrt[t]{a}} = \sqrt[s \cdot t]{a} = \sqrt[t]{\sqrt[s]{a}} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(a^{1/t}\right)^{1/s} = a^{1/st} = \left(a^{1/s}\right)^{1/t} , \\
\sqrt[s]{a} \cdot \sqrt[s]{b} = \sqrt[s]{a \cdot b} \quad &\Longleftrightarrow \quad a^{1/s} \cdot b^{1/s} = (a \cdot b)^{1/s} ,
\end{aligned}$$

und entsprechend für Division statt Multiplikation. Sogar "neue" Wurzelrechengesetze, auf die man nicht ohne Weiteres kommt, lassen sich aus den Potenzrechengesetzen ableiten:

$$\sqrt[s]{a} \cdot \sqrt[t]{a} = \sqrt[st]{a^{s+t}} = \left(\sqrt[st]{a}\right)^{s+t} \quad \Longleftrightarrow \quad a^{1/s} \cdot a^{1/t} = a^{\frac{1}{s}+\frac{1}{t}} = a^{\frac{s+t}{st}} .$$

Statt mit solchen komplizierten Wurzelrechengesetzen zu operieren, sollte man aber besser

- *immer alle Wurzeln $\sqrt[s]{a}$ als Potenzen $a^{1/s}$ umschreiben und dann die einfacheren und leicht zu merkenden Rechenregeln für Potenzen verwenden.* ∎

Es liegt auf der Hand, dass die Basen 10 (Dezimalsystem) und 2 (dyadisches System, wird für die Zahlendarstellung in Computern benutzt ebenso wie das Hexadezimalsystem, also die Basis 16) von besonderer Bedeutung sind. Keineswegs offensichtlich und eine bemerkenswerte mathematische Entdeckung ist, dass eine andere Basis für die Potenzrechnung besonders günstig ist, nämlich die Eulersche Zahl $\mathrm{e} = 2.71828182\ldots$. Diese Zahl ist nicht rational und auch nicht mit wiederholtem Wurzelziehen aus einer rationalen Zahl zu erhalten; es ist vielmehr bekannt, dass sie *transzendent* ist, d.h. sie löst keine algebraische Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ mit rationalen Koeffizienten a_k. Wie kann es sein, dass eine so "abgelegene" reelle Zahl in gewisser Weise die beste Basis für die Potenzrechnung ist, so dass sie als "natürliche Basis" bezeichnet wird? Bemerkenswerterweise hängt die Anwort mit Finanzmathematik zusammen, nämlich mit dem Problem der kontinuierlichen Verzinsung. Dazu greifen wir in der folgenden Diskussion auf Kap. 2 vor.

DISKUSSION (kontinuierliche Verzinsung und die natürliche Basis):

1) Wir betrachten die Verzinsung eines Kapitals in einem Zeitraum t Jahre zu einem gegebenen Zinsfuß $p\%$. Bei einfacher Verzinsung ist der Aufzinsungsfaktor dann $1+\frac{pt}{100}$. Teilen wir den Zeitraum in n gleich lange Zinsperioden ein und schlagen die Zinsen am Ende jeder Periode dem Kapital zu, so ist der Aufzinsungsfaktor $(1+\frac{pt}{100n})^n$ natürlich größer. Das ist ökonomisch klar wegen des Zinseszinseffekts und mathematisch auch leicht beweisbar; z.B. ergibt sich aus der binomischen Formel, wenn man nur die ersten beiden Summanden berücksichtigt, sofort $(1+\frac{pt}{100n})^n > 1+\binom{n}{1}\frac{pt}{100n} = 1+\frac{pt}{100}$.

Nun kann man sich auf den Standpunkt stellen, dass die Einteilung in endlich viele Zinsperioden, z.B. in Quartale oder Monate, "ungerecht" ist — vielmehr müsste man, um die anfallenden Zinsen "gerecht" mitzuverzinsen, die Laufzeit in Tage, Stunden, Sekunden, ja eigentlich in beliebig kurze Zinsperioden einteilen. Das bedeutet, dass die Zahl n der Zinsperioden immer größer gemacht werden muss und schließlich über alle Grenzen wächst. Es ist ökonomisch klar und mathematisch auch beweisbar, dass die Aufzinsungsfaktoren $q_n := (1+\frac{pt}{100n})^n$ größer werden, wenn man die Zahl n der Zinsperioden (innerhalb derselben Laufzeit t) vergrößert; denn dabei wirkt sich der Zinseszinseffekt ja stärker aus. Die Frage ist nun: Wie groß werden diese Aufzinsungsfaktoren? Etwa beliebig groß, so dass der Zinsertrag bei "gerechter" Verzinsung ebenfalls beliebig groß wird? Ökonomisch betrachtet erscheint das zumindest unwahrscheinlich, und ein Test, etwa mit $p\% = 5\%$ und $t = 1$ (Jahr), gibt für $n = 1, 2, 10, 100, 1000, \ldots$ die Aufzinsungsfaktoren 1.05, $1.025^2 = 1.050625$, $1.005^{10} \approx 1.051135$, $1.0005^{100} \approx 1.051258$, $1.00005^{1000} \approx 1.0512695, \ldots$, was auch nicht gerade auf ein Anwachsen über alle Schranken hindeutet.

Tatsächlich bleiben die q_n beschränkt, und auch dies kann man mit einer ökonomischen Überlegung einsehen. Dazu betrachten wir für $n > \frac{pt}{100}$ die Abzinsungsfaktoren $\widetilde{q}_n := (1-\frac{pt}{100n})^n$ für die vorschüssige Abzinsung eines Kapitals in n gleich langen Zinsperioden der Gesamtdauer t. Es ist ökonomisch klar und wiederum mathematisch beweisbar, dass auch diese Faktoren mit wachsendem n größer werden, weil die abzuziehenden Zinsen nach jeder Zinsperiode von einem verkleinerten Kapital berechnet werden, ein Effekt, der sich bei mehr Zinsperioden früher und stärker auswirkt. Nun gilt hier aber $q_n \cdot \widetilde{q}_n = [(1+\frac{pt}{100n})\cdot(1-\frac{pt}{100n})]^n = [1-(\frac{pt}{100n})^2]^n < 1$, d.h. $q_n < 1/\widetilde{q}_n$. Weil hier die Zahlen q_n und $\widetilde{q}_n$ mit wachsendem n anwachsen, die Reziproken $1/\widetilde{q}_n$ also abnehmen, können die q_n mit wachsendem n nicht beliebig groß werden. Nun ist es eine fundamentale Eigenschaft des Bereichs der reellen Zahlen, dass jede wachsende Folge $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$ von reellen Zahlen, die von oben beschränkt ist (d.h. alle q_n liegen unterhalb einer festen Zahl) einen Grenzwert q besitzt, was hier bedeutet, dass die q_n dieser Zahl q so nahe kommen wie man will (aber stets kleiner bleiben), wenn man nur n genügend groß wählt. Diese Zahl wird $q := \lim_{n\to\infty} q_n$ bezeichnet ("Limes von q_n bei n gegen Unendlich") und hat die ökonomische Bedeutung des Aufzinsungsfaktors zum Zinsfuß $p\%$ in der Laufzeit t Jahre bei Zinszuschlag nach beliebig kurzen Zinsperioden, also gewissermaßen bei ständigem Zinszuschlag. Sie heißt daher

- **Aufzinsungsfaktor bei kontinuierlicher Verzinsung** zu $p\%$ in der Laufzeit t:

$$q = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p\cdot t}{100\cdot n}\right)^n.$$

2) Die Eulersche Zahl e erhalten wir nun, wenn wir oben p und t so wählen, dass $\frac{pt}{100} = 1$ ist, also z.B. die kontinuierliche Verzinsung für 100 Jahre zu 1% betrachten oder für 20 Jahre zu 5%. Es ergibt sich dann die sogenannte

- **natürliche Basis (Eulersche Zahl):**

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459\ldots .$$

An dieser Stelle ist noch nicht einzusehen, warum diese Zahl eine "gute Basis" für die Potenzbildung sein soll. Aber wenn wir annehmen, dass $\frac{pt}{100} = \frac{k}{l}$ rational ist mit $k, l \in \mathbb{N}$ und für n Vielfache $n = m \cdot k$ des Zählers k einsetzen, so ergibt sich $q_n^l = [(1+\frac{1}{l\cdot m})^{l\cdot m}]^k$. Hier strebt mit wachsendem m nun der Term $[\ldots]$ gegen die Eulerschen Zahl e, weil $l \cdot m$ natürliche Zahlen durchläuft und beliebig groß wird, und man überlegt sich leicht, dass die Potenzen $[\ldots]^k$ dann der entsprechenden Potenz e^k beliebig nahe kommen für hinreichend große m. Auf der anderen Seite strebt q_n mit wachsendem $n = m \cdot k$ gegen den kontinuierlichen Aufzinsungsfaktor q aus 1) und die Potenz q_n^l damit gegen q^l. Das Resultat ist, dass $q^l = \mathrm{e}^k$ sein muss, also $q = \mathrm{e}^{k/l} = \mathrm{e}^{pt/100}$. Mit Worten:

- *Der Aufzinsungsfaktor bei kontinuierlicher Verzinsung ist die Potenz der Eulerschen Zahl mit dem Laufzeit-anteiligen Zinsfuß als Exponenten,*

$$q = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p\cdot t}{100\cdot n}\right)^n = \mathrm{e}^{\frac{p\cdot t}{100}}.$$

Das haben wir zwar nur für rationale Werte von $\frac{pt}{100}$ vorgerechnet, es gilt aber für beliebige positive reelle Werte x des Laufzeit-anteiligen Zinsfußes, weil der dazu gehörende Aufzinsungsfaktor offenbar zwischen den Aufzinsungsfaktoren zu rationalen Werten von $\frac{pt}{100}$ liegt, die kleiner bzw. größer als x sind.

Außerdem gilt eine entsprechende Aussage für das vorschüssige kontinuierliche Abzinsen. Wir haben in 1) schon gesehen, dass die zugehörigen Abzinsungsfaktoren $\widetilde{q}_n < 1$ mit n anwachsen, wobei $q_n \cdot \widetilde{q}_n < 1$ gilt. Daraus folgt, dass auch die Folge $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2, \widetilde{q}_3, \ldots$ einen Grenzwert $\widetilde{q}$ hat, wobei $q \cdot \widetilde{q} \le 1$ ist. Für große n haben wir andererseits auch $q_n \cdot \widetilde{q}_n = [1-(\frac{pt}{100n})^2]^n > 1 - \frac{1}{n}(\frac{pt}{100})^2$, was man erkennt, wenn man den vorletzten Term als vorschüssigen kontinuierlichen Abzinsungsfaktor zu $p\%$ für n Zinsperioden in der Laufzeit $pt^2/100n$ auffasst und mit dem aus ökonomischen Gründen offensichtlich kleineren vorschüssigen Diskontierungsfaktor bei einfacher Verzinsung vergleicht. Da $\frac{1}{n}$ beliebig klein wird mit wachsendem n, muss daher auch $q\cdot\widetilde{q} \ge 1$ sein, d.h. es gilt sogar $\widetilde{q} = q^{-1} = \mathrm{e}^{-pt/100}$. Da dies das Reziproke des Aufzinsungsfaktors $\mathrm{e}^{pt/100}$ ist, sind also bei kontinuierlicher Verzinsung die vor- und die nachschüssigen Aufzinsungsfaktoren gleich, und wir können die erhaltenen Ergebnisse wie folgt zusammenfassen:

- *Aufzinsungsfaktor bzw. Abzinsungsfaktor zum Laufzeit-anteiligen Zinsfuß $x = \frac{p\cdot t}{100} > 0$ sind bei kontinuierlicher (nach- oder vorschüssiger) Verzinsung gegeben durch die Potenzen der natürlichen Basis mit Exponent x bzw. $-x$,*

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad \textit{bzw.} \qquad \mathrm{e}^{-x} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n.$$

Es versteht sich, dass zu einem strengen Beweis der obigen Grenzwertformeln für die Potenzen von e mathematische Grenzwerttheorie erforderlich ist, um die Rechnungen mit Grenzwerten, die wir angedeutet haben, zu rechtfertigen. Diese Grenzwerttheorie stellt die Mathematik auch zur Verfügung, d.h. man kann alle obigen Argumente zu exakten mathematischen Beweisen ausarbeiten. Das brauchen wir aber hier nicht zu tun; denn für die Mathematik in der Wirtschaftswissenschaft genügt eine intuitive Vorstellung von Grenzwerten und Grenzübergängen, und damit kann man auch den Zusammenhang von kontinuierlicher Verzinsung mit den Potenzen der Eulerschen Zahl schon gut verstehen.

3) Mit der Interpretation der Potenzen von e als Aufzinsungsfaktoren für das Anwachsen eines Kapitals bei kontinuierlicher Verzinsung ist nur eine von vielen Eigenschaften beschrieben, welche die natürliche Basis gegenüber anderen Basen auszeichnet. Dieselbe Eigenschaft ist übrigens auch die Ursache für das Auftauchen der Potenzen dieser Zahl in vielen Gesetzen der Naturwissenschaften; denn wenn man einen Prozess unbeschränkten Wachstums oder Zerfalls hat (wie z.B. radioaktiver Zerfall), so lässt sich genau dieselbe Argumentation anwenden wie oben beim Anwachsen eines Kapitals durch kontinuierliche Aufzinsung bzw. beim Abnehmen des Kapitalstands durch kontinuierliche Abzinsung, d.h. man erhält als Wachstums- bzw. Zerfallsfaktoren für die Laufzeit t die Potenzen $\mathrm{e}^{\pm kt} = a^t$ mit einer gewissen für den Prozess charakteristischen Wachstumsrate $k > 0$ und $a = \mathrm{e}^{\pm k}$. Ein solches "Exponentialgesetz" ist auch deswegen zu erwarten, weil bei demselben kontinuierlichem Wachstum in n aufeinander folgenden Zeitspannen $t_1, \ldots, t_n$ der Wachstumsfaktor für die Gesamtlaufzeit $t = t_1 + \ldots + t_n$ gleich dem Produkt der Wachstumsfaktoren für die einzelnen Zeitabschnitte t_k sein sollte, und in der Tat ist ja auch gemäß Potenzgesetzen

$$a^{t_1} \cdot a^{t_2} \cdot \ldots \cdot a^{t_n} = a^{t_1+t_2+\ldots+t_n} .$$

4) Ein besonderer Vorteil der natürlichen Basis e ist, dass man die Potenzen e^x mit beliebigen reellen Exponenten x sehr gut und schnell näherungsweise berechnen kann, viel besser als die Potenzen anderer Basen wie 2 oder 10. Die Darstellung von e^x als Grenzwert der Ausdrücke $(1+\frac{x}{n})^n$ bei $n \to \infty$ ist dazu allerdings wenig geeignet; für $x = 1$ etwa ist der Fehler $\mathrm{e}^x - (1+\frac{x}{n})^n$ etwa so groß wie $\frac{1}{n}$, was bedeutet, dass man n sehr groß wählen muss (z.B. 10^6), um durch Berechnung von $(1+\frac{x}{n})^n$ den Wert von e^x auf einige Dezimalen (z.B. 6 Dezimalen) genau zu erhalten. Mit der binomischen Entwicklung

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k$$

kann man eine für die Berechnung von e^x besser geeignete Darstellung erhalten. Dazu überlegt man, dass die Faktoren $\binom{n}{k}(\frac{1}{n})^k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}$ für große n ungefähr gleich $\frac{1}{k!}$ sind, wobei die Übereinstimmung um so besser ist, je größer n gewählt wird. Mit wachsendem n strebt daher die linke Seite der binomischen Entwicklung gegen e^x und die rechte gegen die Summe der Summanden $\frac{1}{k!}x^k$, d.h. man erhält die für alle $x \in \mathbb{R}$ gültige Darstellung der Potenz e^x durch die sog. **Exponentialreihe**

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots .$$

Dies ist wie bei der in Abschnitt 1.1 erwähnten unendlichen geometrischen Reihe so zu verstehen, dass die Summe der ersten n Summanden rechts ein Näherungswert für e^x ist, wobei der Fehler kleiner ist als jede vorgegebene Fehlerschranke (z.B. 10^{-6}), wenn man nur n gross genug wählt. Weil die Fakultäten $k!$ der natürlichen Zahlen k sehr schnell anwachsen mit wachsendem k — viel schneller als die Potenzen x^k jeder festen Zahl x, selbst wenn x groß ist —, werden die Glieder der Exponentialreihe sehr schnell klein. Man braucht daher nur wenige Summanden der Reihe zu berücksichtigen, um e^x schon mit sehr großer Genauigkeit durch die Summe dieser Glieder annähern zu können. Eine genauere Analyse zeigt, dass der Fehler, den man bei Abbruch der Exponentialreihe mit dem n-ten Summanden macht, nicht größer ist als $\frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}\mathrm{e}^{|x|}$; für $|x| \leq 1$ genügen daher die ersten 10 Summanden der Reihe, um e^x bis auf 6 Dezimalstellen genau zu erhalten. *Die natürliche Basis* e *ist dadurch ausgezeichnet, dass man mit der Exponentialreihe ein exzellentes Verfahren zur Berechnung ihrer Potenzen* e^x *zur Verfügung hat* — ein derart einfaches und genaues Verfahren zur Berechnung von Potenzen a^x gibt es für andere Basen a nicht!

5) Die sog. **natürliche Exponentialfunktion** $\exp(x) := \mathrm{e}^x$ zur Basis e hat weitere besondere Eigenschaften, die sie vor den Exponentialfunktionen $\exp_a(x) := a^x$ zu anderen Basen a auszeichnet. Zum Beispiel ist sie die einzige Exponentialfunktion, die Steigung 1 an der Stelle $x = 0$ hat, d.h. es gilt $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$ für kleine Werte des Betrags $|x|$, wobei der Fehler im Verhältnis zur Größe von $|x|$ beliebig klein wird, wenn $|x|$ klein genug ist. Daraus folgt, dass die natürliche Exponentialfunktion die einzige Exponentialfunktion — und bis auf einen Faktor sogar die einzige Funktion überhaupt — ist, deren Ableitung die Funktion selbst ist (wir kommen darauf in der Differentialrechnung zurück). Die Eulersche Zahl e tritt ferner in vielen sehr verschiedenen Zusammenhängen in der Mathematik auf, es handelt sich in diesem Sinne wirklich um ein fundamentale "Naturkonstante", wie z.B. auch die Kreiszahl π, und zwischen beiden Zahlen gibt es tiefe Zusammenhänge. Wir erwähnen die *Stirlingsche Formel*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\,,$$

die für große natürliche Zahlen n die Größe der Fakultäten $n!$ sehr genau beschreibt. Für große Zahlen n sind die Fakultäten, eben weil sie riesig groß sind, schwer in den Griff zu bekommen; ein gewöhnlicher Taschenrechner kommt z.B. nur bis (69)!, weil (70)! schon größer ist als die auf dem Rechner nicht mehr darstellbare Zahl 10^{100}. Die Stirligsche Formel gibt Näherungswerte für die Fakultäten in dem Sinne, dass der relative Fehler, das ist der Quotient aus linker und rechter Seite minus 1, sehr klein ist für große n, und zwar sogar kleiner als eine beliebig klein gegebene Fehlerschranke, wenn nur n groß genug ist. (Genauer ist der relative Fehler größer als Null und kleiner als $\mathrm{e}^{1/12n} - 1$.) Die Näherungsformel für die Werte der Fakultäten $n!$ wird also gewissermaßen um so besser, je größer n ist! Eine gute näherungsweise Kenntnis der Fakultäten großer Zahlen n und der hierdurch ausdrückbaren Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ist wichtig in der Statistik bei großen Fallzahlen. Dies ist ein durchaus auch für die Wirtschaftswissenschaft relevantes mathematisches Fachgebiet, und insofern ist auch die Stirlingsche Formel für die Ökonomie von Bedeutung. Statistik gehört aber nicht mehr zum Lehrstoff dieses Kurses, sondern ist ein eigener spezieller Kurs im Studium der Wirtschaftswissenschaft.

Ein anderer tiefer Zusammenhang zwischen e und π zeigt sich, wenn man den Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zum Bereich der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitert, in dem auch eine Quadratwurzel aus -1 vorhanden ist, die sog. "imaginäre Einheit" $\mathring{\mathrm{i}}$. Man kann dann auch die Potenzen a^z von positiven Basen $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ als Exponenten sinnvoll erklären, und Euler hat eine tiefe Beziehung der Potenzen von e mit Vielfachen $\mathring{\mathrm{i}}t$ der imaginären Einheit als Exponenten ($t \in \mathbb{R}$) zu den Kreisfunktionen Sinus und Kosinus und damit zur Kreiszahl π gefunden, nämlich die *Eulersche Formel*

$$\mathrm{e}^{\mathring{\mathrm{i}}t} = \cos t + \mathring{\mathrm{i}} \sin t\,,$$

speziell

$$\mathrm{e}^{\mathring{\mathrm{i}}\pi/2} = \mathring{\mathrm{i}}\,, \quad \mathrm{e}^{\mathring{\mathrm{i}}\pi} = -1\,, \quad \mathrm{e}^{\mathring{\mathrm{i}}3\pi/2} = -\mathring{\mathrm{i}}\,, \quad \mathrm{e}^{\mathring{\mathrm{i}}2\pi} = 1\,.$$

In der Wirtschaftsmathematik kommen freilich komplexe Zahlen nicht (oder selten) vor, daher ist auch die bemerkenswerte Eulersche Formel dort nicht von Bedeutung. Wir haben sie nur erwähnt, um die besondere Rolle der natürlichen Basis e zu unterstreichen, die sich — wie oben gesehen — schon bei der mathematischen Modellierung bestimmter "idealer" ökonomischer Vorgänge wie der kontinuierlichen Verzinsung zeigt, mehr aber noch, wenn man in andere Bereiche der Mathematik hineinschaut. ■

Wir kommen nun zum letzten Thema dieses Abschnittes, den Logarithmen. Auf diesen Begriff stößt man, wenn man die Lösung von *Exponentialgleichungen* $a^x = y$ untersucht, d.h. zu gegebener Basis a und rechter Seite y ist der Exponent x gesucht, für den die Potenz a^x den Wert y hat. (Natürlich muss, wie immer, $a > 0$ und $y > 0$ sein, damit die Fragestellung sinnvoll ist; die Basis $a = 1$ ist ebenfalls ein auszuschließender Sonderfall, weil ja $1^x = 1$ ist für alle x, so dass die Exponentialgleichung dann für $y \neq 1$ keine und für $y = 1$ alle Zahlen x als Lösung hat.) Betrachten wir eine Basis $a > 1$, so wird a^x beliebig groß für große Werte von x, also größer als y. Das erkennt man daran, dass für die nächstkleinere ganze Zahl $n := \lfloor x \rfloor$ die Ungleichung $a^x = a^{x-n} \cdot a^n \geq a^n = (1 + (a-1))^n > 1 + n(a-1)$ gilt (wobei wir im letzten Schritt nur die beiden ersten Summanden der binomischen Entwicklung berücksichtigt haben; außerdem ist $a^{x-n} \geq 1$, weil die Basis > 1 ist und der Exponent nichtnegativ, siehe 1.4). Für negative Werte von x mit sehr großem Betrag $|x| = -x$ ist andererseits a^x das Reziproke der sehr großen Zahl $a^{|x|}$ und damit sehr klein, also auch kleiner als $y > 0$. Mit der Zwischenwerteigenschaft der reellen Zahlen folgt daher, dass es einen Wert x des Exponenten geben muss, für den a^x genau gleich y ist. (Der exakte mathematische Beweis benutzt die Stetigkeit der Exponentialfunktion, d.h. a^s und a^t unterscheiden sich beliebig wenig, wenn s und t in $\mathbb{R}$ nahe genug beieinander liegen. Das ergibt sich z.B. aus der für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $0 < t-s < \frac{1}{n}$ gültigen Abschätzung $a^t = a^{t-s} \cdot a^s < a^{1/n} \cdot a^s = \sqrt[n]{1 + (a-1)} \cdot a^s < [1 + \frac{1}{n}(a-1)] \cdot a^s$; siehe 1.4.) Es kann auch nur einen einzigen solchen Wert geben; denn ist $a^x = y = a^{\widetilde{x}}$, so folgt $a^{x-\widetilde{x}} = 1$ und damit $x = \widetilde{x}$, weil Potenzen von Basen $\neq 0$ mit Exponenten $\neq 0$ nicht den Wert 1 haben können (für $a > 1$ ist der Wert > 1, wenn der Exponent positiv ist, und < 1, wenn der Exponent negativ ist; siehe 1.4). Damit haben wir also für Basen $a > 1$ gefunden, dass die Exponentialgleichung $a^x = y$ für alle $y > 0$ genau eine Lösung hat. Diese Feststellung ist die Grundlage der folgenden Definition der Logarithmen. Für Basen $0 < a < 1$ gilt übrigens wegen $a^x = (1/a)^{-x}$ mit $1/a > 1$ dieselbe Aussage.

DISKUSSION (Logarithmenrechnung):

1) Zunächst ermöglichen uns die obigen Vorüberlegungen folgende Definition:

- *Für eine gegebene Basis $1 \neq a \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine gegebene Zahl $y \in \mathbb{R}_{>0}$ heißt die eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Exponentialgleichung $a^x = y$ der* **Logarithmus des Numerus y zur Basis a** *und wird* $\log_a y$ *notiert. Bei Wahl der Basis $a = 10$ schreibt man einfach* $\log y$ *statt* $\log_{10} y$ *und nennt diese Zahl den* **dekadischen Logarithmus** *von y (auch:* Briggscher Logarithmus *und gelegentlich* $\lg y$ *notiert). Bei Wahl der natürlichen Basis $a = \mathrm{e}$ schreibt man* $\ln y$ *für* $\log_e y$ *und nennt dies den* **natürlichen Logarithmus** *des Numerus y (*"ln" *für* "logarihmus naturalis"*).*

Als Logarithmus wird also immer ein gesuchter *Exponent* bezeichnet, und der Numerus ist der Wert der Potenz der Basis zu diesem Exponenten. Dabei *muss der Numerus stets positiv sein*; für $y \leq 0$ ist $\log_a y$ nicht definiert, weil a^x nur positive Werte annehmen kann. Außerdem *muss die Basis positiv und verschieden von 1 sein*, weil sonst die Potenzen a^x überhaupt nicht definiert sind bzw. nur den Wert 1 annehmen können. Üblicherweise werden nur Zahlen $a>1$ als Basis gewählt, mit Basen $0<a<1$ arbeitet man besser nicht.

2) Aus der Definition der Logarithmen und den Potenzgesetzen ergeben sich sofort Rechenregeln für Logarithmen, die nur eine Übersetzung der Potenzgesetze in die Logarithmensprache" sind. Dabei nehmen wir natürlich an, dass alle Numeri und die Basis positiv sind und dass die Basis außerdem von 1 verschieden ist. Dann haben wir die folgenden

Logarithmusgesetze:

- *die Potenz eines Logarithmus zu derselben Basis ist der Numerus, der Logarithmus einer Potenz zu derselben Basis ist der Exponent:*

$$a^{\log_a y} = y\,, \qquad \log_a(a^x) = x\,;$$

- *Der Logarithmus von* 1 *ist stets* 0, *der Logarithmus der Basis zu sich selbst ist* 1 :

$$\log_a 1 = 0\,, \qquad \log_a a = 1\,;$$

- *der Logarithmus eines Produkts / Quotienten ist die Summe / Differenz der Logarithmen der Faktoren zur gleichen Basis:*

$$\log_a(y \cdot z) = \log_a y + \log_a z\,, \qquad \log_a \frac{y}{z} = \log_a y - \log_a z\,;$$

- *der Logarithmus einer Potenz des Numerus ist das Produkt des Exponenten mit dem Logarithmus des Numerus zur gleichen Basis:*

$$\log_a(y^s) = s \cdot \log_a y\,;$$

- *der Logarithmus des Kehrwertes eines Numerus ist das Negative, der Logarithmus der* n*–ten Wurzel des Numerus ist das* $\frac{1}{n}$*–Fache des Logarithmus vom Numerus:*

$$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y\,, \qquad \log_a \sqrt[n]{y} = \frac{1}{n}\log_a y\,.$$

Die erste Gleichung ist nichts anderes als die Definition des Logarithmus, $\log_a y$ ist schließlich gerade der Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um das Ergebnis y zu erhalten. Und die zweite Gleichung besagt nichts anderes, als dass man eben a mit dem Exponenten x potenzieren muss, wenn man das Ergebnis a^x erhalten will. Diese beiden Gesetze kann man auch so zusammenfassen:

- *Das Logarithmieren zur Basis* a *ist die Umkehroperation des Exponentiierens zur Basis* a ,

d.h. wenn man erst den Logarithmus zu einer positiven Zahl bildet und anschließend die Potenz der Basis mit diesem Exponenten, so erhält man die Ausgangszahl zurück, und wenn man umgekehrt erst zu einem reellen Exponenten die Potenz der Basis bildet und anschließend davon den Logarithmus, so erhält man den Ausgangsexponenten zurück. Für die speziellen Basen 10 und e gilt also

$$10^{\log y} = y \quad \log(10^x) = x\,, \qquad \mathrm{e}^{\ln y} = y\,, \quad \ln(\mathrm{e}^x) = x\,.$$

Das zweite Logarithmusgesetz ist ein Spezialfall des ersten ($x = 0$ bzw. $x = 1$ wählen). Das dritte und vierte angegebene Gesetz ist die Entsprechung der Potenzgesetze $a^{x+\widetilde{x}} = a^x \cdot a^{\widetilde{x}}$ (entsprechend bei Subtraktion der Exponenten links und Division rechts) und $(a^x)^s = a^{x \cdot s}$; setzt man hier $x = \log_a y$ und $\widetilde{x} = \log_a z$ ein, so erhält man sofort die behaupteten Gleichungen. Das letzte Gesetz schließlich ist ein Spezialfall des vorletzten ($x = -1$ bzw. $x = \frac{1}{n}$ einsetzen).

3) Die Logarithmusgesetze bezogen sich auf das Logarithmieren zu einer festen Basis a. Hier diskutieren wir Rechenregeln für den Wechsel der Basis. Wir betrachten dazu zwei von 1 verschiedene Basen $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Aus

$$y = b^x = \left(a^{\log_a b}\right)^x = a^{x \cdot \log_a b}$$

lesen wir dann unmittelbar die folgenden Regeln für den Basiswechsel ab.

Umrechnen von Logarithmen und Potenzen bei Wechsel der Basis:

- *Die Potenz einer neuen Basis mit einem Exponenten erhält man, indem man in der Potenz der alten Basis diesen Exponenten mit dem Logarithmus der neuen Basis multipliziert:*
$$b^x = a^{x \cdot \log_a b};$$
- *der Logarithmus eines Numerus bzgl. einer neuen Basis ist der Quotient des alten Logarithmus dieses Numerus und des alten Logarithmus der neuen Basis:*
$$\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}.$$

Es versteht sich, dass hier der Logarithmus der neuen Basis b bzgl. der alten Basis a gemeint ist; denn der Logarithmus von b bzgl. b ist ja gleich 1. Statt mit dem Logarithmus der neuen Basis bzgl. der alten zu dividieren, kann man auch mit dem Logarithmus der alten Basis bzgl. der neuen multiplizieren; denn mit der speziellen Wahl $y = a$ erhält man aus der letzten Gleichung

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

Für das häufig benötigte **Umrechnen auf die natürliche Basis** gilt insbesondere:

$$a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}, \qquad \ln y = \frac{\log_a y}{\log_a \mathrm{e}} = (\log_a y) \cdot (\ln a).$$

Beim Wechsel der Basis verändern sich die Logarithmen aller (positiven) Zahlen stets um denselben, nur von den beteiligten Basen abhängigen Faktor, daher gilt:

- *Der Quotient zweier Logarithmen zu derselben Basis, ist von der Wahl der Basis unabhängig,*
$$\frac{\log_a y}{\log_a z} = \frac{\log_b y}{\log_b z} = \frac{\log y}{\log z} = \frac{\ln y}{\ln z}.$$

Aus dieser leicht zu merkenden Aussage kann man sich die Umrechnungsformeln für Logarithmen bei Basiswechsel immer schnell herleiten; man braucht dazu für z nur eine der Basen zu nehmen und $\log_z z = 1$ zu beachten. Da $\log_a a^{-1} = -\log_a a = -1$ ist, zeigt die Umrechnungsformel für den Übergang zur reziproken Basis (was auch aufgrund der Logarithmusdefinition klar ist: Man muss $1/a$ mit $-x$ potenzieren, um dasselbe Ergebnis zu erhalten wie bei der Potenzierung von a mit x):

$$\log_{1/a} y = -\log_a y.$$

Deshalb ist es keine Einschränkung sich nur mit Basen $a > 1$ zu befassen: Die Logarithmen bzgl. einer Basis a mit $0 < a < 1$ erhält man einfach durch Vorzeichenumkehr bei den Logarithmen zur reziproken Basis $1/a > 1$.

4) Auf jedem wissenschaftlichen Taschenrechner sind die dekadische und die natürliche Logarithmusfunktion verfügbar sowie die natürliche Exponentialfunktion und die Exponentialfunktionen zu allgemeinen Basen. Wir wollen abschließend noch einige Worte dazu sagen, wie man Logarithmen und Potenzen mit allgemeinen Exponenten gut (näherungsweise) berechnen kann. Wie die natürliche Exponentialfunktion so hat auch die Logarithmusfunktion zur natürlichen Basis besondere Eigenschaften, die sie vor allen andern Logarithmusfunktionen auszeichnet und sie leichter berechenbar macht. Zu erwähnen ist

hier vor allem die für $0 < y \leq 2$ gültige **Logarithmusreihe**

$$\begin{aligned}\ln y &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(y-1)^k \qquad\qquad (0 < y \leq 2)\\ &= (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \frac{1}{4}(y-1)^4 + - \ldots\end{aligned}$$

Wie generell bei unendlichen Reihen ist dies so zu verstehen, dass die Teilsumme der ersten n Summanden rechts ein Näherungswert für die Zahl $\ln y$ links ist, wobei die Abweichung kleiner ist als eine beliebig klein gegebene Fehlerschranke, wenn man nur die Anzahl n der erfassten Summanden groß genug macht. Für y nahe bei 0 oder bei 2 ist die Reihe zur Berechnung von $\ln y$ nicht gut geeignet, man braucht sehr viele Summanden (etwa 10^6), um $\ln y$ mit akzeptabler Genauigkeit (etwa 10^{-6}) zu erhalten. Für $y > 2$ ist die Reihe überhaupt nicht mehr brauchbar, die Summanden werden mit wachsendem k immer größer und die Teilsummen nähern sich mit wachsender Summandenzahl n keiner reellen Zahl mehr an; man sagt, dass die Reihe für $y > 2$ "divergiert". Für y zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ aber ist die Logarithmusreihe ganz brauchbar; mit n Summanden erhält man dann den Wert $\ln y$ schon mit einem Fehler kleiner als $\frac{1}{n}2^{-n}$. Und die Berechnung der Logarithmen anderer Zahlen z kann man mit den Logarithmusgesetzen auf die Berechnung der Logarithmen zu Zahlen zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ zurückführen, z.B. mit $\ln 2 = \ln(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}) = \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3}$ und $\ln z = m \cdot \ln 2 + \ln(z \cdot 2^{-m})$, wobei $m \in \mathbb{Z}$ so gewählt wird, dass $\frac{1}{2} \leq z \cdot 2^{-m} \leq \frac{3}{2}$ ist.

Eine andere Formel, mit der man den natürlichen Logarithmus von $y > 0$ durch Ziehen von Wurzeln aus y approximieren kann, ist

$$\ln y = \lim_{n\to\infty} n \cdot (\sqrt[n]{y} - 1) ,$$

was bedeutet, dass der Ausdruck rechts ein Näherungswert für $\ln y$ ist, wobei der Fehler kleiner ist als jede gegebene Fehlerschranke, wenn man n groß genug wählt. Die Formel kann man verstehen, wenn man $\sqrt[n]{y} = y^{1/n} = \mathrm{e}^{(1/n)\ln y}$ schreibt und mit der Exponentialreihe $1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{n}\ln y + \frac{1}{2!}(\frac{1}{n}\ln y)^2 + \ldots$ berechnet. Für große Werte von n machen wir hier einen Fehler von der Größenordnung $(\frac{1}{n})^2$, wenn wir die Summanden nach den ersten beiden weglassen, daher ist $n \cdot (\sqrt[n]{y} - 1) \approx \ln y$ bis auf einen Fehler der Größenordnung $\frac{1}{n}$. Lässt man n nur Zweierpotenzen $n = 2^m$ durchlaufen, so kann man $\sqrt{y}$, $\sqrt[4]{y} = \sqrt{\sqrt{y}}$, $\sqrt[8]{y} = \sqrt{\sqrt[4]{y}}, \ldots$ durch fortgesetztes Quadratwurzelziehen berechnen und erhält so ein einfaches Verfahren für die näherungsweise Berechnung von $\ln y$ durch $2^m(\sqrt[2^m]{y} - 1)$, das nur das Ziehen von Quadratwurzeln und die Potenzen von 2 mit natürlichen Exponenten benötigt.

Nachdem man Verfahren zur Berechnung natürlicher Logarithmen $\ln y$ hat, kann man mit 2) natürlich auch Logarithmen $\log_a y = \ln y / \ln a$ zu beliebigen Basen $1 \neq a > 0$ berechnen und mit der Exponentialreihe auch allgemeine Potenzen $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ solcher Basen. In der Mathematik sind Verfahren entwickelt (und in Taschenrechnern und Rechenprogrammen implementiert) worden, die viel besser und genauer sind als das, was wir hier angedeutet haben. Es ging uns lediglich darum, deutlich zu machen, dass man allgemeine Potenzen a^x und Logarithmen $\log_a y$ nicht nur wie oben sinnvoll definieren kann, sondern dass sich diese Potenzen und Logarithmen bei konkreten Vorgaben der Parameter a, x, y auch praktisch und effektiv berechnen lassen (selbst in Bereichen der Variablen, die von einem normalen Taschenrechner nicht mehr erfasst werden). ■

Wir schließen diesen Abschnitt mit zwei Beispielen zur Anwndung der Logarithmenrechnung, einer mathematischen und einer ökonomischen, die zeigt, dass einfache ökonomische Fragestellungen durchaus auf Exponentialgleichungen führen können, deren Lösung das Logarithmieren erfordert.

BEISPIELE (*Anwendungen der Logarithmenrechnung*):

1) *Der dekadische Logarithmus* $\log y$ *bestimmt die Anzahl der Stellen vor bzw. der Nullen nach dem Dezimalpunkt in der Dezimaldarstellung der Zahl* $y \in \mathbb{R}_{>0}$. Ist nämlich $m = \lfloor \log y \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $\log y$, so gilt $m \leq \log y < m+1$ und daher $10^m \leq y < 10^{m+1}$. (Wir benutzen hier, dass die Potenzen von 10 bei Vergrößerung des Exponenten größer werden; siehe 1.4.) Ist m eine natürliche Zahl oder Null, so bedeutet dies, dass die Dezimaldarstellung der Zahl y vor dem Dezimalpunkt $m+1$ Stellen hat mit führender Ziffer $\neq 0$. Ist aber $m = -n$ eine negative ganze Zahl, so bedeutet es, dass die Dezimaldarstellung von y mit einer Null vor dem Dezimalpunkt beginnt und nach dem Dezimalpunkt $n-1$ Nullen hat gefolgt von einer Ziffer $\neq 0$. (Dabei sollen abbrechende Dezimalbrüche stets so dargestellt sein, dass sie mit 000... enden, nicht mit 999... .) Dieselben Aussagen gelten für andere Basen, z.B. gibt $\lfloor \log_2 y \rfloor$ die Anzahl der Stellen vor bzw. der Nullen nach dem Punkt in der dyadischen Zahldarstellung von $y \in \mathbb{R}_{>0}$ an.

2) *Laufzeitberechnungen bei Zinsesverzinsung* erfordern die Bestimmung unbekannter Exponenten, also das Logarithmieren. Sind etwa ein Anfangskapital $K_0 > 0$ und ein Aufzinsungsfaktor $q > 1$ für eine Zinsperiode gegeben und ist gefragt, nach welcher Anzahl von Zinsperioden ein vorgegebener Zielwert $K_{\text{Ziel}} > K_0$ erreicht oder erstmals überschritten ist, so hat man

$$q^n K_0 = K_{\text{Ziel}} \qquad \text{bzw.} \qquad q^n = \frac{K_{\text{Ziel}}}{K_0}$$

nach n aufzulösen. Logarithmieren gibt $n = \log_q(K_{\text{Ziel}}/K_0) = \frac{1}{\log q}\log(K_{\text{Ziel}}/K_0)$. (Zuletzt haben wir den dekadischen Logarithmus verwendet; die Wahl der Basis spielt aber bei Quotienten von Logarithmen zu derselben Basis keine Rolle, also hätten wir genau so gut die natürlichen Logarithmen nehmen können.) Nun wird der Exponent n, zu dem die Potenz von q genau den Wert K_{Ziel}/K_0 erreicht, im Allgemeinen keine ganze Zahl sein. Gehen wir dann zu der nächstgrößeren ganzen Zahl über, die mit $\lceil n \rceil$ bezeichnet wird, so überschreitet die Potenz von q mit diesem ganzen Exponenten erstmals den Wert K_{Ziel}/K_0 (weil die Potenzen von $q > 1$ mit wachsendem Exponenten größer werden, siehe 1.4). Ergebnis ist (wenn wir wieder n für $\lceil n \rceil$ schreiben) die

- **Laufzeitformel bei Zinsesverzinsung:**

$$n = \left\lceil \frac{\log K_{\text{Ziel}} - \log K_0}{\log q} \right\rceil .$$

Etwas komplizierter ist die Sache, wenn auch noch in jeder Zinsperiode eine positive Rate (Rente) R vom Kapital ausgezahlt werden soll. Der Kapitalstand nach n Zins- und Ratenperioden ist dann durch eine "Rentenformel" gegeben, die wir in Kap. 2 herleiten. Eine typische Fragestellung ist hier, wie lange die Rente gezahlt werden kann, bis das Kapital aufgebraucht ist. Man hat hier also $K_{\text{Ziel}} = 0$ zu wählen. Die Formel kann dann wieder nach q^n aufgelöst werden, und durch Logarithmieren erhält man n. Da dies im Allgemeinen keine ganze Zahl ist, muss man hier die nächstkleinere ganze Zahl bilden, um die Anzahl der Rentenperioden zu erhalten, nach denen das Kapital gerade noch positiv ist, so dass es mit Zahlung einer kleineren "Restrente" auf Null gesetzt wird. (Genaueres sagen wir in Kap. 2.) ■