Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2022
19.04.2022
Blatt 3

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

8. (4+3 P.) Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \cos(zx) \qquad \text{für} \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten und die Fourierreihe von f. Beachten Sie dabei, dass f eine gerade Funktion ist, und verwenden Sie Aufgabe 6 sowie das Additionstheorem für den Cosinus.

(b) Begründen Sie, dass die Fourierreihe von f absolut und gleichmäßig gegen f konvergiert. Folgern Sie für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ die Partialbruchentwicklungen

(i) des Cosecans

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2 - k^2} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right)$$

(ii) und des Cotangens

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right).$$

Die Partialbruchentwicklung des Cotangens haben wir bereits in der Vorlesung über Funktionentheorie mit Hilfe des Residuensatzes berechnet (vgl FT, Abschnitt 13). Hier eine weitere - vielleicht elementarere - Herleitung zu geben, scheint berechtigt, da diese Identität in der "Eulerschen Analysis" der Schlüssel zu weiteren Erkenntnissen ist. Z. B. erhält man durch Integration dieser Partialbruchentwicklung die Produktdarstellung

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

des Sinus, aus der für $z = \frac{1}{2}$ das Wallissche Produkt

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

hervorgeht (vgl. Übungen zu FT, Blatt 12, A47). Ferner liefert der Vergleich der Partialbruch- mit der Potenzreihenentwicklung des Cotangens die Eulerschen Formeln

Bitte wenden!

$$\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}}{2(2k)!}(2\pi)^{2k} B_{2k}$$

(hierbei sind die B_{2k} die Bernoulli-Zahlen zu geraden Indices), insbesondere auch die Lösung des "Basler Problems" der Berechnung von $\zeta(2)$. (Vgl. Übungen zur FT, Blatt 11, A46). Auch die Partialbruchzerlegung des Cosecans hat einen nicht verschwindenden Gebrauchswert, wie die folgende Aufgabe zeigt. Auch das dort zu berechnende Integral kann mit dem Residuensatz erledigt werden (vgl. erneut: FT, Abschnitt 13).

9. (6 + 2 P.) Für $0 < \gamma < 1$ sei $I_\gamma := \int_0^\infty \frac{x^{\gamma-1}}{1+x} dx$.

(a) Berechnen Sie I_γ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung des Cosecans. (Anleitung: Zerlegen Sie den Integrationsbereich in die Teilintervalle $(0, 1)$ und $(1, \infty)$. Verwenden Sie anschließend die geometrische Reihe. Begründen Sie die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung, z. B. mit Hilfe des Satzes von Beppo Levi.)

(b) Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf $\gamma \in S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

10. (2 + 3 P.) Der *Poisson-Kern* $(P_r)_{r\in[0,1)}$ wird für $x \in \mathbb{T}$ definiert durch

$$P_r(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ikx}.$$

Zeigen Sie:

(a) $P_r(x) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x) + r^2}$,

(b) $(P_r)_{r\in[0,1)}$ ist für $r \to 1$ eine approximative Einheit auf $\mathbb{T}$.

Abgabe: 26.04.2022
Besprechung: 03.05.2022