Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2022
07.06.2022
Blatt 9

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

28. (Hardy's Ungleichungen, 4+3 P.) Es seien $1 \leq q < \infty$, $\rho > 0$ und $\varphi : (0, \infty) \to [0, \infty)$ λ^1-messbar. Zeigen Sie:

$$(1)\quad \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t \varphi(u)du\right)^q t^{-\rho}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{\rho}\left(\int_0^\infty (u\varphi(u))^q u^{-\rho}\frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$(2)\quad \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \varphi(u)du\right)^q t^{\rho}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{\rho}\left(\int_0^\infty (u\varphi(u))^q u^{\rho}\frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Hinweis: Zu (1) berechne man die Faltung $f * g$ bezüglich des Haar-Maßes auf $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ für die Funktionen

$$f(u) = u^{-\frac{\rho}{q}}\chi_{[1,\infty)(u)} \quad \text{und} \quad g(u)u^{1-\frac{\rho}{q}}$$

und wende die Young'sche Ungleichung an.

29. (1+2 P.) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $p(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(a) Konstruieren Sie aus p nach dem Standardverfahren eine approximative Einheit $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ auf $\mathbb{R}$. (Wenn Sie an die Normierung gedacht haben, haben Sie den Poisson-Kern auf $\mathbb{R}$ erzeugt.)

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Poissonschen Summationsformel, dass durch Periodisierung aus $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ der (renormierte) Poisson-Kern auf $\mathbb{T}$ entsteht, das ist

$$\frac{1}{2\pi}P_r(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$$

(vgl. Aufgabe 10. Wie müssen Sie $r \in (0,1)$ in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$ dabei wählen? Gilt $r \nearrow 1$ genau dann, wenn $\varepsilon \searrow 0$?)

30. (4 P.) Es sei

$$k \in L^1\Big((\mathbb{R}^+, \cdot), \frac{dx}{x}\Big) \qquad \text{mit} \qquad \int_0^\infty k(x)\frac{dx}{x} = 1.$$

Konstruieren Sie hieraus eine approximative Einheit $(k_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ auf $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ mit $k_1(x) = k(x)$ und

$$L^1 - \lim_{\varepsilon\to 0} k_\varepsilon * f = f \qquad \text{für alle} \qquad f \in L^1\Big((\mathbb{R}^+, \cdot), \frac{dx}{x}\Big).$$

Bitte wenden!

31. **(8 P.)** Bestimmen Sie die duale Gruppe $\widehat{G}$ für die multiplikative Gruppe $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$. Welche Gestalt nimmt die Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+} : L^1(G) \to L^\infty(\widehat{G})$ an? Für die Funktionenscharen $f_\gamma(x) = x^\gamma e^{-x}$ mit $0 < \gamma$ und $g_\beta(x) = \dfrac{x^\beta}{1+x}$ mit $0 < \beta < 1$ sind Ihnen die Fouriertransformierten $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+} f_\gamma(\xi)$ und $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+} g_\beta(\xi)$ aus früheren Aufgaben bereits bekannt. Geben Sie diese an.

Abgabe: 14.06.2022
Besprechung: 21.06.2022