Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2022
17.05.2022
Blatt 7

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

21. (4 P.) In der Aufgabe 44 der Übungen zur Analysis III (Blatt 12) haben Sie gezeigt, dass die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}} : L^1(\mathbb{R}) \to C_{(0)}(\mathbb{R}), \quad f \mapsto \mathcal{F}_{\mathbb{R}} f := \widehat{f}$$

nicht surjektiv ist. Modifizieren Sie das Argument, um zu zeigen, dass auch

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}} : L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto \mathcal{F}_{\mathbb{T}} f := (\widehat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$$

nicht surjektiv ist.

22. (4 P.) Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$f(x) := \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

und, allgemeiner für $\lambda > 0$, $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{f_\lambda}(\xi)$. Für welchen Wert von λ erhalten Sie einen weiteren Fixpunkt der Fouriertransformation?

Hinweis: Substituieren Sie $t = e^x$ und verwenden Sie Aufgabe 9.

23. (3+3 P.) Untersuchen Sie, ob

(a) die Funktionen $f(x) = e^{-x^2} \sin e^{x^2}$ und $g(x) = e^{-\sqrt{1+x^2}}$ zu $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gehören;
(b) die Funktionen $f(x) = e^x$ bzw. $g(x) = e^x e^{ie^x}$ reguläre temperierte Distributionen T_f bzw. T_g definieren.

24. (3 P.) Die Funktion $\psi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \psi(z) := \frac{1}{z}$ ist (nach beliebiger Ergänzung in $z_0 = 0$) auf $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ lokal integrierbar, außerhalb des Einheitskreises beschränkt, und definiert also eine reguläre temperierte Distribution. In der "Einführung in pDG" haben Sie erfahren, dass $E(z) = \frac{1}{\pi}\psi(z)$ eine Fundamentallösung des Cauchy-Riemann-Operators

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

ist. Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{\psi}(\zeta)$. ($\zeta = \xi + i\eta$ sei die $z = x + iy$ entsprechende Fouriervariable.)

Abgabe: 24.05.2022
Besprechung: 31.05.2022