Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2022
10.05.2022
Blatt 6

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

17. (3 P.) Berechnen Sie die Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}$$

mit Hilfe der Poissonschen Summationsformel.

18. (2 + 3 P.) Die Theta-Funktion wird definiert als

$$\vartheta : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \vartheta(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t k^2}.$$

Zeigen Sie

(a) mit Hilfe der Poissonschen Summationsformel die Funktionalgleichung

$$\vartheta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\vartheta(\frac{1}{s}),$$

(b) für $s > 1$ die Identität

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}(\vartheta(t)-1)dt = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Hierbei ist $\zeta(s) = \sum_{k=1}^\infty k^{-s}$.

19. (2 + (2+1+1+3) + 1 P.) Es seien

$$\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \theta(x) := \chi_{(0,\infty)}(x)$$

die *Heavyside-Funktion*, $\theta^-(x) := \theta(-x)$, $\operatorname{sign}(x) := \theta(x) - \theta(-x)$ und, für $\varepsilon > 0$, $\theta^\pm_\varepsilon(x) := e^{-\varepsilon|x|}\theta(\pm x)$. (Diese messbaren und beschränkten Funktionen seien als temperierte Distributionen aufgefasst.) Zeigen Sie:

(a) $\theta = \mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon\searrow 0}\theta^+_\varepsilon$ und $\theta^- = \mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon\searrow 0}\theta^-_\varepsilon$.

(b) Für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gelten

(i) $\widehat{\theta}[f] = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x-i\varepsilon}dx,$

(ii) $\widehat{\theta^-}[f] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x+i\varepsilon} dx,$

(iii) $\widehat{\mathrm{sign}}[f] = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{2xf(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx,$

(iv) $\widehat{\mathrm{sign}}[f] = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon<|x|} \frac{f(x)}{x} dx.$

Hinweis zu (b), (iv): Beachten Sie, dass

$$\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(x)-f(0)}{x} dx.$$

Bemerkung: Die hier als Fouriertransformierte auftretenden temperierten Distributionen werden für so wichtig erachtet, dass sie eigene Bezeichnungen erhalten:

$$\frac{1}{x \pm i0}[f] := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x \pm i\varepsilon} dx$$

und

$$\mathrm{P.V.}\frac{1}{x}[f] := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon<|x|} \frac{f(x)}{x} dx.$$

P.V. steht für “principle value”, damit ist der Cauchysche Hauptwert von $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x}$ gemeint.

Zusatzfrage: Was ist $\widehat{\mathrm{P.V.}\frac{1}{x}}$?

20. (3 P.) Beweisen Sie die *Sokhotzki-Identitäten*

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta_0 + \mathrm{P.V.}\frac{1}{x}$$

Abgabe: 17.05.2022
Besprechung: 24.05.2022