

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

15. (4 P.) Es seien L, M und N natürliche Zahlen. Beweisen Sie die Identität

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{N}{k}^2 = \binom{2N}{N},$$

indem Sie die Parsevalsche Gleichung auf die Funktion $f(x) = (1+e^{ix})^N$ anwenden. Können Sie mit dem angegebenen Argument auch die allgemeinere Form

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{N}{k} \binom{M}{L-k} = \binom{N+M}{L}$$

zeigen? (Versuchen Sie es ggf. zuerst mit dem Spezialfall $L = M$.)

16. (Eine ONB von $L^2(\mathbb{R})$ aus Eigenvektoren der Fouriertransformation. 3+2+4+3+2 P.) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ seien $bf(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx})f(x)$, $b^*f(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})f(x)$ und $Nf := b^*bf$. Die Hermite-Funktionen $(H_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf \mathbb{R} seien rekursiv definiert durch

$$H_0(x) := \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{und, für } n \geq 1 : \quad H_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n}} b^* H_{n-1}(x).$$

- (a) Berechnen Sie $H_n(x)$ für $n \in \{1, 2\}$. Welche Gestalt hat $H_n(x)$ im allgemeinen? Was können Sie über die Parität der H_n aussagen?
- (b) Zeigen Sie für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dass $\langle b^*f, g \rangle = \langle f, bg \rangle$. (Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf $L^2(\mathbb{R})$, und die behauptete Gleichung bedeutet, dass der Operator b^* formal der Adjungierte von b ist.) Berechnen Sie ferner den Kommutator $[b, b^*] := bb^* - b^*b$ der Operatoren b und b^* .

Bitte wenden!

(c) Beweisen Sie induktiv:

(i) $NH_n = nH_n$,

(ii) $\langle H_n, H_m \rangle = \delta_{nm}$

(iii) $\widehat{H}_n = (-i)^n H_n$.

(d) Zeigen Sie für $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $g(x) = f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, dass

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^j}{j!} \int_{\mathbb{R}} x^j e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) dx.$$

(e) Folgern Sie: Ist $f \in \langle H_n : n \in \mathbb{N}_0 \rangle^\perp \subset L^2(\mathbb{R})$, so ist $f = 0$.

Beachten Sie, dass das Ergebnis in (f) die Vollständigkeit des ONS $(H_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bedeutet.

Abgabe: 10.05.2022

Besprechung: 17.05.2022